This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math 3009.02.25

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM

Annals of mathematics

SBORNÍK
JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ
V PRAZE.

Číslo V.

ED. WEYRA

POČET DIFFERENCIÁLNÝ.

V PRAZE.
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

POČET DIFFERENCIÁLNÝ.

SEPSAL

EDUARD WEYR.

V PRAZE 1902.

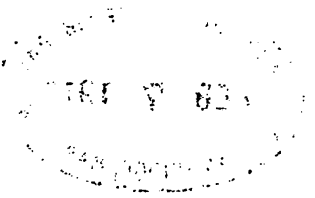
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

Math 3009.02.25

HARVARD COLLEGE LIBRARY
FEB 7 1911
CAMBRIDGE, MASS.

Annals of mathematics

Knihtiskárna B. Stýbla v Praze.



Předmluva.

Dávaje na veřejnost první díl počtu infinitesimálného, k jehož sepsání jsem byl vybídnut sl. výborem Jednoty českých mathematiků, mám za vhodné naznačiti několika slovy směr, jímž jsem se bral.

Přihlížeje k tomu, že počet infinitesimálný jest ovládán pojmem limity, snažil jsem se, abych objasněním tohoto a pojmů s ním souvisících, t. pojmů meze, spojitosti, derivace, differenciálu a j., zmírnil obtíže, jež se začátečníkům staví v cestu při prvním studiu vyšší mathematiky. Z té příčiny nejprve pojednáno o číslech irracionálných a to obšírněji, než by se jinak nutným zdálo. Na základě pojmu limity vyvozena bez podstatných obtíží theorie konvergence řad a součinů a taktéž i základy theorie funkční. Pak přikročeno k počtu differenciálnému a k jeho applikacím analytickým i geometrickým, při čemž přihlíženo zvláště k tomu, aby všude byly přesně vytčeny praemissy, na nichž spočívají dedukce. V poslední kapitole uvažovány elementárné funkce komplexní proměnné, avšak neučiněna zmínka o příslušné obecné theorii, již zůstavuji až po počtu integrálném.

Bylo by zbytečno vypisovati tituly všech děl, jichž užito při sepsání této knihy, jsou z větší části na příslušných místech uvedena; sluší k nim ještě přičiniti *R. Lipschitz*, Lehrbuch der Analysis, 2 sv., 1877—1880, *F. Gomes Teixeira*, Curso de Analyse infinitesimal (calculo differencial),

Porto, 1890, a *J. Thomae,* Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen, Halle, 1880, a dodati, že geometrické applikace differenciálného počtu vyloženy v podstatě dle *Serretovy* knihy. Čtenář v uvedených spisech najde jak doplnění látky, kterou vyčerpati při přípustném obsahu spisu nebylo možno, tak i další literární poukazy.

Snaha po plném vystižení nových pojmů a po uspokojivém odvození výsledků vedla auktora mnohdy k stylisaci méně stručné jak výkladů theoretických tak i applikací; za tou příčinou nebylo možno v knize směstnati tolik materiálu, kolik ho nalézáme ve spisech jiných, n. p. v záslužném díle prof. dra. *F. J. Studničky* »O počtu differenciálném«, 2. vyd., 1878, k jehož četným a zajímavým literárně historickým poznámkám zvláště budiž poukázáno. Z téže příčiny omezen počet příkladů, objasňujících obecné úvahy a poskytujících začátečníkům vhodná cvičení, na míru skrovnější; čtenář jich však nalezne hojnost v knížce téhož auktora »Vyšší mathematika v úlohách«, 2. vyd., 1874, jakož i ve sbírkách úloh, které vydali *Frenet, Tisserand, Sohncke, Schlömilch* a j., a také v učebnici: *J. Hoüel,* Cours de calcul infinitésimal, 3 sv., 1878—80, sepsané zvěčnělým příznivcem a čestným členem Jednoty českých mathematikův.

Aby se docílilo větší jasnosti tisku, užito ve formulích pro velké litery veskrze a pro malé v indexech a v exponentech písma antiqua zvaného; úprava ta, obvyklá vzhledem k velkým literám v tisku francouzském, se dobře osvědčuje.

Ku konci budiž mi dovoleno vzdáti vřelé díky *Jednotě českých mathematiků,* která se v náklad spisu uvázala, jakož i p. inž. *K. Friedlovi,* jenž s plnou znalostí věci narýsoval obrazce.

11. října 1901.

Spisovatel.

OBSAH.

Kapitola I.

Čísla racionálná, irracionálná, komplexní.

Článek — Strana

1. Čísla racionálná a irracionálná 1
2. Rovnost a nerovnost čísel 3
3. Stanovení čísel posloupností desetinnou 4
4. Čísla vytknutá libovolným nekonečným zlomkem desetinným . . 6
5. Obecnější posloupnosti definující čísla 8
6. Pojem racionálné limity 10
7. Posloupnosti konvergující 11
8. Definice čísel konvergujícími posloupnostmi 12
9. Konvergující posloupnosti definující totéž číslo neb nestejná čísla 14
10. Početní úkony s čísly reálnými: sčítání a odčítání 17
11. Násobení a dělení čísly reálnými 18
12. Konvergující posloupnosti o reálných členech 20
13. Totožnost limity posloupnosti s definovaným číslem 21
14. Geometrické znázornění čísel reálných 22
15. Čísla komplexní č. soujemná 24
16. Základní početní úkony s čísly komplexními 26
17. Mocnění a odmocňování čísel komplexních 29

Kapitola II.

Limity a meze. Nekonečné řady a součiny.

18. Rozšířený pojem limity 32
19. Pojem horní a dolní meze 35
20. Posloupnost o členech komplexních 36

Článek Strana
21. Konvergence nekonečných řad 36
22. Rozhodování o konvergenci, zbytek řady, konvergence absolutní . 38
23. Přemístění členů řady konvergující 42
24. Porovnávání řad, řada geometrická 45
25. Pokračování 49
26. Kriteria Cauchy-ova 51
27. Kriterium Raabe-ovo 56
28. Kriteria Cauchy-Bertrandova 58
29. Řady o členech komplexních 60
30. Početní úkony s řadami 63
31. Řady mocninné 65
32. Stejnoměrná konvergence řady 68
33. Konvergence nekonečných součinů 71
34. Kriterium konvergence pro součiny reálné 74
35. Kriterium konvergence nekonečných součinů komplexních 78
36. Stejnoměrná konvergence součinu 80

Kapitola III.

O funkcích, hlavně jedné proměnné, a zvlášť o elementárných funkcích.

37. Reálné proměnné a funkce 82
38. Horní a dolní mez funkčních hodnot 84
39. Spojité funkce 86
40. Pokračování 88
41. Spojitost součtu, součinu, podílu dvou funkcí; spojitost funkce funkce 89
42. Další vlastnosti spojitých funkcí 91
43. Pojem limity při spojité funkci 93
44. Inversní funkce 96
45. Spojitost nekonečných řad, zvlášť mocninných 98
46. Řada dvojitá 101
47. Geometrické znázornění funkce 104
48. Spojitost funkce dvou neb více proměnných 105
49. Komplexní proměnné a funkce 105
50. Funkce exponenciálná 107
51. Vlastnosti funkce exponenciálné 109
52. Funkce logarithmická 110
53. Číslo *e*, funkce exponenciálná ve tvaru limity 113
54. Funkce goniometrické 117
55. Funkce cyklometrické 119

Článek Strana
56. Součet dvou cyklometrických funkcí 121
57. Funkcionálná rovnice 123

Kapitola IV.

Derivace a differenciály funkcí jedné proměnné.

58. Veličiny infinitesimálné, t. j. nekonečně malé a nekonečně velké 126
59. Dvě zásady o veličinách infinitesimálných 128
60. Derivace funkce 131
61. Pojem differenciálu 132
62. Derivace a differenciál součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí 134
63. Differencování funkce funkce a funkce inversní 138
64. Derivace funkce exponenciálné a logarithmické 140
65. Derivace funkcí goniometrických 142
66. Derivace funkcí cyklometrických 143
67. Derivování nekonečné řady 146
68. Věty o derivaci 149
69. Vyšší derivace a vyšší differenciály funkce jedné proměnné . . 153

Kapitola V.

Rozvoj funkce jedné proměnné v řadu mocninnou.

70. Methoda neurčitých koefficientův 157
71. Věta Taylorova 159
72. Řada Taylorova 162
73. Řada Mac-Laurinova 164
74. Funkce definovaná řadou mocninnou 165
75. Rozvoj funkce exponenciálné 167
76. Rozvoj funkcí sin x a cos x 168
77. Rozvoj funkce logarithmické 169
78. Vyčíslení logarithmů 171
79. Interpolování v tabulkách logarithmických 174
80. Řada binomická 175
81. Binomický rozvoj $(1 + x)^m$ při $x = \pm 1$ 177
82. Rozvoj funkce arc tg x 180
83. Rozvoj funkce arc sin x 183
84. Funkce sin x a cos x vyjádřeny nekonečnými součiny . . . 184
85. Rozvoje funkcí tg x, cotg x a jiných 189

Kapitola VI.

Funkce více proměnných a funkce implicitní. Vznik rovnic differenciálných.

Článek Strana
86. Parciálné č. částečné derivace a differenciály 193
87. Bezvýznamnost pořadu derivací 194
88. Totálný differenciál a jeho souvislost s přírůstem funkce . . 196
89. Differenciál funkce složené z více funkcí jedné proměnné . . . 198
90. Totálný differenciál funkce složené 200
91. Totálné differenciály vyšších řádů 201
92. Věta Taylorova pro funkce více proměnných 203
93. Existence implicitní funkce jedné proměnné a jejích derivací . 207
94. Implicitní funkce více proměnných 210
95. Více implicitních funkcí současnými rovnicemi definovaných . . 212
96. Inverse řady mocninné 215
97. Vznik differenciálných rovnic obyčejných 216
98. Vznik parciálných differenciálných rovnic lineárných prvního řádu 220
99. Vznik obecných parciálných rovnic prvního řádu 221

Kapitola VII.

Neurčité tvary. Zavádění nových proměnných. Homogenní funkce. Funkcionálné determinanty.

100. Doplnění definice funkce pro zvláštní hodnoty proměnné . . . 224
101. Neurčitý tvar $\frac{0}{0}$. 225
102. Neurčitý tvar $\frac{\infty}{\infty}$ 229
103. Neurčité tvary $\infty - \infty$, $0 . \infty$ 232
104. Neurčité tvary 0^0, 1^∞, ∞^0 234
105. Vyčíslení neurčitých tvarů pomocí rozvojů a limitování . . . 235
106. Zavádění nové neodvisle proměnné 236
107. Zavádění nových neodvisle proměnných 239
108. Záměna všech proměnných za jiné 242
109. Homogenní či stejnorodé funkce 244
110. Eulerova věta o homogenních funkcích 246
111. Funkcionálné determinanty 248

Kapitola VIII.

Maxima a minima.

112. Maxima a minima funkce jedné proměnné 253
113. Příklady 256

Článek Strana
114. Maxima a minima funkce více proměnných: nutné výminky . . 260
115. Nutné a postačující výminky pro maximum neb minimum . . 263
116. Definitní formy kvadratické 266
117. Příklady 268
118. Relativná maxima a minima 272

Kapitola IX.

Theorie čar v rovině.

119. Tečna, normála 276
120. Asymptoty 280
121. O styku tečny s čarou 285
122. Průběh čáry v rovině 287
123. Vícenásobné body čáry 290
124. Derivace a differenciál plochy 295
125. Derivace a differenciál oblouku čáry 297
126. O křivosti čar v rovině 299
127. Kružnice zakřivení 301
128. O směru normály a tečny 303
129. O evolutě a evolventě křivky rovinné 305
130. Příklad: kuželosečky 306
131. Příklad: cykloida 311
132. Differenciál plochy a oblouku v polárných souřadnicích . . . 313
133. Tečna a poloměr zakřivení v polárných souřadnicích 315
134. Příklady 317
135. O čarách obalujících 321
136. O styku čar v rovině 324
137. Čáry oskulující, zvlášť kružnice 327

Kapitola X.

Theorie křivosti čar v prostoru.

138. Stanovení ploch a čar počtem 331
139. Tečna a normálná rovina čáry 332
140. Tečná rovina a normála plochy 334
141. Differenciál oblouku libovolné čáry 338
142. Směr tečny 342
143. Oskulační rovina 343

Článek Strana
144. Hlavní normála a binormála 346
145. Křivost čáry, poloměr zakřivení 348
146. Výrazy pro poloměr zakřivení 350
147. Souvislost dané čáry se sférickou 351
148. Kružnice a střed zakřivení, přímka polárná 352
149. Torse č. druhá křivost 354
150. Vlastnosti obou sférických čar 356
151. Formule Frenetovy 358
152. Některé applikace formul Frenetových 359
153. Šroubovice na rotačním válci 364

Kapitola XI.

Theorie křivosti ploch.

154. Theorém Meusnierův 367
155. Křivost normálných řezů; theorém Eulerův 370
156. Průběh hodnot R 372
157. Indikatrix 374
158. Normálné řezy v obecné poloze 378
159. Plochy obalující 382
160. Plochy rozvinutelné 385
161. Sdružené tečny plochy 387
162. Přímočaré plochy: zborcené a rozvinutelné 389
163. Čáry křivoznačné 392
164. Příklady k čarám křivoznačným 394
165. Čáry asymptotické na ploše 397
166. Příklady k čarám asymptotickým 400
167. Gaussova míra křivosti 402

Kapitola XII.

Elementárné funkce komplexní proměnné.

168. Funkce racionálné 406
169. Funkce exponenciálná komplexní proměnné 407
170. Funkce goniometrické komplexní proměnné 408
171. Hyperbolické funkce 410
172. Logarithmus komplexního čísla; obecná mocnina 411
173. Periodičnost funkcí exponenciálné a goniometrických 413
174. Funkce cyklometrické 414
175. Upotřebení 415

Kapitola I.

Čísla racionálná, irracionálná, komplexní.

1. Čísla racionálná a irracionálná.

Ryzí mathematika obírá se čísly, jednajíc o vztazích mezi nimi.

Na prvním místě se uvažují čísla racionálná č. směrná, t. j. čísla celistvá s nullou, a zlomky o celistvém čítateli a jmenovateli; mohou býti kladná neb záporná. Pokládajíce pravidla o počítání s čísly racionálnými za známá, přikročíme k číslům irracionálným.

K číslům těm nejprve vedlo odmocňování čísel racionálných. Jde-li n. p. o $\sqrt{3}$, t. j. o stanovení čísla, jehož čtverec se rovná 3, tu snadno nahlédneme, že žádané číslo v oboru čísel racionálných neexistuje. O celistvých číslech jest to patrné, a o zkráceném zlomku $\frac{p}{q}$ to vychází z toho, že rovnost $\frac{pp}{qq} = 3$ jest nemožna, poněvadž také v posledním zlomku jsou čítatel a jmenovatel čísla nesoudělná.

Čtverec každého racionálného čísla jest tedy buď větší aneb menší než 3; tím zařaděna všecka racionálná kladná čísla do dvou skupin, z nichž první obsahuje všecka racionálná kladná čísla o čtverci menším než 3, a druhá všecka o čtverci větším než 3. Každé číslo první skupiny jest menší než každé číslo druhé skupiny, neboť menší číslo má i menší čtverec. V první skupině není žádné číslo, jež by bylo největším v této skupině, a v druhé není žádné, jež by bylo v ní nejmenším. Kdybychom n. p. supponovali, že a jest největší číslo první skupiny, náleželo by každé větší číslo $a + h$ do druhé skupiny, t. j.

$$(a + h)^2 > 3;$$

avšak vzhledem k $a^2 < 3$ možno voliti kladné h tak malé, že i $(a + h)^2$ jest menší než 3, neboť rozdíl $(a + h)^2 - a^2$, t. j. $2ah + h^2$, možno učiniti libovolně malým volbou dosti malého h. Skutečně, aby

$$h\,(2a + h) < \varepsilon,$$

stačí supponovati

$$0 < h < \frac{\varepsilon}{2a + 1}, \quad h < 1;$$

pak tedy při $\varepsilon = 3 - a^2$ bychom měli $(a + h)^2 - a^2 < 3 - a^2$, a tedy $(a + h)^2 < 3$, což odporuje učiněné supposici, a ta jest tudíž nemožna.

Obdobně vychází, že v druhé skupině není žádného čísla, jež by bylo menší než všecka ostatní čísla této skupiny.

Kdykoli se podaří roztříditi všecka racionálná čísla, kladná i záporná, do dvou skupin takových, že každé číslo první skupiny jest menší než každé číslo druhé skupiny, a že v první skupině není žádné číslo největším a v druhé žádné nejmenším, pravíme, že jest definováno číslo irracionálné; vzhledem k němu se zove první skupina dolní, a druhá horní skupinou *).

N. p. všecka kladná čísla racionálná, jichž čtverec jest menší než 3, se všemi zápornými čísly racionálnými tvoří dolní skupinu, a všecka kladná čísla racionálná, jichž čtverec jest větší než 3, horní skupinu o vytknutých vlastnostech; těmito skupinami jest definováno irracionálné číslo, které označíme $\sqrt{3}$. Abychom mohli jednati o čtverci tohoto irracionálného čísla a tvrditi, že jest 3, nutno dříve seznati početní úkony s čísly nového druhu.

O číslu irracionálném A ovšem pravíme, že jest větší než každé racionálné číslo skupiny dolní a menší než každé racionálné číslo skupiny horní; dále, že A jest obsaženo mezi dvěma racionálnými čísly a, $b > a$, náleží-li a do skupiny dolní a b do skupiny horní vzhledem k A stanovené.

Kdykoli se podaří zařaditi všecka racionálná čísla, obsažená mezi dvěma racionálnými čísly a, $b > a$, do dvou skupin obdobných vlastností, jest tím definováno irracionálné číslo; stačí

*) *Dedekind*, Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872; *J. Tannery*, Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable, 1886, kdež auktor praví, že v podstatě tuto definici vytknul již *Bertrand* ve svém Traité d'Arithmétique.

doplniti nynější dolní skupinu všemi racionálnými čísly menšími než a a hořejší všemi racionálnými čísly většími než b.

Není zbytečno připomenouti, že i racionálné číslo a možno definovati dvěma obdobnými skupinami; dolní skupinou, obsahující všecka racionálná čísla menší než a, jakož i číslo a samo, a horní skupinou, obsahující všecka racionálná čísla větší než a, aneb dolní skupinou, utvořenou ze všech čísel racionálných, menších než a a horní, utvořenou z čísla a a ze všech racionálných čísel větších než a. V obou případech obsahují obě skupiny všecka racionálná čísla, a jest také každé číslo dolní skupiny menší než každé číslo skupiny horní; v tom však se tyto skupiny liší od skupin definujících číslo irracionálné, že v prvním případě se vyskytuje v dolní skupině číslo největší, t. a, a v druhém v horní skupině číslo nejmenší, opět a.

2. **Rovnost a nerovnost čísel.**

Dvě irracionálná čísla A, B jsou si rovna

$$A = B,$$

jestliže obě skupiny čísel racionálných definující A jsou totožny s oněmi, jež definují B; patrně stačí, aby dolní skupina vzhledem k A stanovená byla totožna s dolní skupinou stanovenou vzhledem k B, aneb horní totožna s horní.

Dvě irracionálná čísla A, B jsou nestejná, nemá-li místa tato totožnost skupin. Pak tedy existuje racionálné číslo náležející do jedné, n. p. dolní skupiny čísla B, které nenáleží do dolní skupiny čísla A, a které jest tudíž v horní skupině tohoto čísla; pak pravíme, že A jest menší než B a píšeme

$$A < B, \qquad B > A.$$

Tato nerovnost irracionálných čísel A, B má tedy za důsledek existenci racionálného čísla a, hovícího nerovnostem

$$A < a < B.$$

Tak tomu jest ale i tenkráte, kdy A, B jsou jakákoli čísla. Jsou-li totiž obě racionálná, jest správnost výroku patrna; je-li A irracionálné, B ale racionálné, tu B náleží do horní skupiny čísla A, a v této skupině existuje racionálné číslo a menší než B; je-li konečně A racionálné, B irracionálné, jest A v dolní skupině čísla B, a v té jsou racionálná čísla a větší než A.

Také opak patrně platí: nerovnost

$$A < a < B,$$

kde a jest číslem racionálným, má vždy v zápětí nerovnost

$$A < B,$$

nechť jsou A, B racionálná neb irracionálná čísla; a obecněji plyne z nerovnosti

$$A < C < B$$

předchozí nerovnost, nechť jsou A, B, C jakákoli čísla.

Jsou-li a, a' dvě racionálná čísla a $a < a' < A$, pravíme, že a' jest bližší k číslu A než a; obdobně při $A < b' < b$, že b' jest bližší k A než b.

Irracionálné číslo sluje kladným, je-li větší než 0, a záporným, je-li menší než 0. Dolní skupina kladného irracionálného čísla A obsahuje záporná i kladná racionálná čísla a, horní jen kladná b; čísla $-a$, $-b$ vyčerpají také všecka racionálná čísla, a s. jest vždy $-a > -b$, tak že čísla $-a$ tvoří horní, a čísla $-b$ dolní skupinu jistého záporného irracionálného čísla A', jež sluje číselně stejným s A, ale znamením opačné: $A' = -A$. Absolutní čili číselnou hodnotou obou těchto čísel nazýváme kladné číslo A.

3. **Stanovení čísel posloupností desetinnou.**

Budiž A kladné irracionálné číslo, definované dolní a horní skupinou čísel racionálných, a značiž α libovolné kladné číslo racionálné.

Všecka čísla

$$0.\alpha,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ \ldots$$

nemohou býti v dolní skupině, neboť rostou nad každé racionálné číslo, a existuje tudíž největší násobek $n\alpha$ zapadající do dolní skupiny, tak že $(n+1)\alpha$ jest již v horní skupině a tedy

$$n\alpha < A < (n+1)\alpha.$$

Irracionálné číslo A jest obsaženo mezi $n\alpha$ a $n\alpha + \alpha$; poněvadž možno za α voliti libovolně malé číslo, jest tím irracionálné číslo A sevřeno mezi dvě racionálná čísla o libovolně malém

rozdílu. — Obdobně možno záporné irracionálné číslo — A sevříti dvěma zápornými násobky racionálného čísla α

$$-(n+1)\alpha < A < -n\alpha$$

různícími se o α.

Učiníme-li posloupně pro kladné irracionálné A resp.

$$\alpha = 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots,$$

mějme

$$\begin{aligned} n \,.\, 1 < A < (n+1) \,.\, 1,\\ n_1 \tfrac{1}{10} < A < (n_1+1)\tfrac{1}{10},\\ n_2 \tfrac{1}{100} < A < (n_2+1)\tfrac{1}{100},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

kde n, n_1, n_2, ... značí 0 neb celistvá kladná čísla. Z toho patrno, že decimálná čísla

$$(1) \qquad n, \frac{n_1}{10}, \frac{n_2}{100}, \frac{n_3}{1000}, \ldots.$$

se přibližují irracionálnému číslu A, jsouce stále menší než A a tvoříce posloupnost (suite, Folge) racionálných čísel nikdy neklesající, kdežto decimálná čísla

$$n+1, \frac{n_1+1}{10}, \frac{n_2+1}{100}, \frac{n_3+1}{1000}, \ldots.$$

tvoří posloupnost čísel větších než A nikdy nestoupající, a přibližujících se číslu irracionálnému A. Číslo to jest obsaženo mezi čísly $\frac{n_\nu}{10^\nu}$, $\frac{n_\nu+1}{100^\nu}$, jichž rozdíl $\frac{1}{10^\nu}$ jest libovolně malý pro dosti velké ν.

Vytknuta-li posloupnost (1), jest jí irracionálné číslo A definováno, t. j. jsou známy obě skupiny číslo A definující. Do dolní skupiny totiž patří každé racionálné číslo rovné některému členu posloupnosti (1) aneb menší, a do horní každé racionálné číslo větší než každý člen této posloupnosti, čímž patrně vyčerpána všecka racionálná čísla.

Budiž nyní A kladné číslo racionálné $\frac{p}{q}$ a vyviňme je známým způsobem v decimálný zlomek. Jsou-li pak n číslo celistvé, v něm obsažené, n_1, n_2, n_3, ... celistvá čísla vznikající z decimálného zlomku, pokračujeme-li v něm resp. až do de-

setin, setin, tisícin, . . . vynechávajíce tečku desetinnou, tu budou racionálná čísla

$$n, \frac{n_1}{10}, \frac{n_2}{100}, \frac{n_3}{1000}, \ldots$$

tvořiti posloupnost nikdy neklesající a přibližující se racionálnému číslu A tak, že

$$0 \leqq A - \frac{n_\nu}{10^\nu} < \frac{1}{10^\nu},$$

tedy s libovolnou přesností.

V arithmetice se učí, že decimálný zlomek ten jest buď o konečném počtu cifer aneb o nekonečném počtu cifer, při čemž však se od jistého místa v něm vyskytuje skupina cifer stále se opakující, t. j. zlomek jest periodický; a naopak vzniká každý nekonečný periodický zlomek desetinný tímto způsobem z jistého racionálného čísla $\frac{p}{q}$.

4. Čísla vytknutá libovolným nekonečným zlomkem desetinným.

Předchozí úvaha vede snadno k poznání, že každým nekonečným a neperiodickým desetinným zlomkem jest vytčeno číslo irracionálné.

Buďte

$$(2) \qquad u = n, \quad u_1 = \frac{n_1}{10}, \quad u_2 = \frac{n_2}{100}, \quad u_3 = \frac{n_3}{1000}, \ldots$$

racionálná čísla, vznikající způsobem již naznačeným z daného desetinného zlomku neperiodického. Utvořme dvě skupiny racionálných čísel takto: do první položme všecka racionálná čísla rovnající se některému členu posloupnosti (2) aneb menší, do do druhé všecka racionálná čísla větší než každý člen její. O skupinách těch možno dokázati, že zahrnují totalitu všech racionálných čísel, že každé číslo skupiny první jest menší než každé číslo skupiny druhé, a že v skupině první není čísla největšího, aniž v skupině druhé čísla nejmenšího, že tedy tyto dvě skupiny definují číslo irracionálné.

Budiž a libovolné kladné racionálné číslo; pak se buď vyskytne v posloupnosti (2) nějaký člen $u_n \geqq a$, aneb každé $u_n < a$; položka $u_n = a$ má totiž v zápětí $u_{n+m} > a$, tedy případ první.

Nastane-li případ první, čítejme a do první skupiny, nastane-li druhý, do druhé; tím jsou všecka racionálná čísla v obou skupinách umístěna.

Je-li a číslo první, b číslo druhé skupiny, máme při jistém n

$$a < u_n < b,$$

a tedy $a < b$.

Vzhledem k nerovnosti $u_n > a$, platné pro jisté n, není žádné číslo a první skupiny největší, neboť u_n jest také v této skupině; a vzhledem k nerovnosti $u_n < b$, platné pro každé n, není žádné číslo v druhé skupině nejmenší, neboť kdyby b bylo nejmenším, stačí je vyvinouti v decimálný zlomek, ovšem konečný neb nekonečný periodický, a poznamenati, že při libovolně malém racionálném kladném ε rozdíl $b - \varepsilon$ by patřil do skupiny první, že by tedy existoval index μ, pro nějž by bylo pro každé ν

$$b - \varepsilon < u_\mu \leqq u_{\mu+\nu}, \quad b = u_{\mu+\nu} + \varepsilon', \quad \varepsilon' < \varepsilon,$$

t. j. rozdíl $b - u_{\mu+\nu} = \varepsilon'$ by byl libovolně malý, i musila by se tedy desetinná místa v rozvoji čísla b shodovati s desetinnými místy čísla $u_{\mu+\nu}$ až po libovolně vzdálené místo, věc nemožná, poněvadž se v rozvoji čísla b opakuje skupina cifer, případně cifra 0, u čísla $u_{\mu+\nu}$ však nikoli.

Tím proveden důkaz, že posloupnost (2) čili nekonečný neperiodický decimálný zlomek definuje číslo irracionálné, obsažené mezi u_n a $u_n + \frac{1}{10^n}$.

Značí-li členy posloupnosti (2) racionálná čísla, vznikající naznačeným způsobem z nekonečného decimálného zlomku periodického, možno obdobně opět jich pomocí roztříditi všecka racionálná čísla na dvě skupiny takové, že každé číslo první skupiny jest menší než každé číslo skupiny druhé, a že v skupině první není čísla největšího; nyní se ale vyskytne v druhé skupině číslo nejmenší, a toto jest ono racionálné číslo $\frac{p}{q}$, jež podává divisí $p : q$ daný periodický zlomek decimálný. Jest totiž z této divise patrno, že každé $u_\nu < \frac{p}{q}$, a že tedy $\frac{p}{q}$ náleží do skupiny druhé; dále jest patrno, že každé racionálné číslo $\frac{p}{q} - \varepsilon$ jest ve skupině první, neboť divise $p : q$ dosti daleko provedena podává libovolně malý zbytek, t. j. pro dosti velké ν jest

$$b - u_\nu < \varepsilon$$

a tedy $b - \varepsilon < u_\nu$. Oběma skupinami, č. stručněji, nekonečným decimálným zlomkem periodickým jest tudíž definováno racionálné číslo $\frac{p}{q}$ ve smyslu čl. 1.

Shrneme-li oba výsledky, můžeme říci, že každým nekonečným zlomkem decimálným jest definováno číslo A a to racionálné, je-li zlomek periodický, a irracionálné, není-li periodický; číslo A se nalézá mezi číslem racionálným u_ν, jež obdržíme, podržíme-li jen ν desetinných míst daného zlomku a mezi číslem $u_\nu + \frac{1}{10^\nu}$.

5. Obecnější posloupnosti definující čísla.

O posloupnosti racionálných čísel

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots$$

pravíme, že nikdy neklesá, platí-li pro každý index $u_\nu \leqq u_{\nu+1}$, a že nikdy nestoupá, platí-li $u_\nu \geqq u_{\nu+1}$.

Budiž (u) posloupnost nikdy neklesající, jejíž každý člen jest menší než určité rac. číslo U, a rozdělme za její pomoci všecka racionálná čísla na dvě skupiny následujícím způsobem.

Do první skupiny zařaďme každé racionálné číslo a rovné některému členu posloupnosti (u) aneb menší, a do druhé skupiny každé racionálné číslo b větší než každý člen této posloupnosti, n. p. číslo U. Každé číslo první skupiny jest patrně menší než každý člen druhé skupiny, neboť $a \lessgtr u_\nu < b$.

V skupině první není čísla největšího, nejsou-li členy posloupnosti (u) od jistého místa všecky stejné, neboť z $a \lessgtr u_\nu$ pak plyne $a < u_{\nu+\nu'}$; jsou-li ale od indexu ν všecky hodnoty u sobě rovny, jest u_ν největší číslo první skupiny, druhá skupina složena ze všech racionálných čísel větších než u_ν, a oběma skupinami definováno číslo u_ν.

V skupině druhé se v prvním případě může vyskytnouti nejmenší číslo b, a pak jest toto definováno oběma skupinami, aneb se takové číslo nevyskytne, a pak definují obě skupiny číslo irracionálné.

Vždy možno číslo A skupinami definované libovolně těsně sevříti dvěma racionálnými čísly; *pro libovolné kladné racionálné* ε

musí totiž existovati celistvé p takové, že pro každé $n > p$ a pro jakékoli ν platí

$$u_{n+\nu} \mid u_n < \varepsilon;$$

jinak by totiž při sebe větším n se vždy nalezlo ν takové, že by

$$u_{n+\nu} - u_n \gtrless \varepsilon,$$

a tedy by existovala čísla $n < n_1 < n_2 < \ldots < n_\varrho$ taková, že by platily nerovnosti

$$\begin{aligned} u_{n_1} - u_n &\gtrless \varepsilon, \\ u_{n_2} - u_{n_1} &\gtrless \varepsilon, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_{n_\varrho} - u_{n_{\varrho-1}} &\gtrless \varepsilon, \end{aligned}$$

z čehož sečtením

$$u_{n_\varrho} - u_n \gtrless \varrho\varepsilon.$$

Pro dosti velké ϱ by pak $u_{n_\varrho} = u_n + \varrho\varepsilon$ bylo větší než každé číslo, tedy i než U, což jest proti supposici.

Volíce kladné racionálné ε libovolně malé, máme tedy při $n > p$,

$$u_{n+\nu} - u_n < \varepsilon \quad \text{čili} \quad u_{n+\nu} < u_n + \varepsilon.$$

Jsou tedy všecka čísla posloupnosti (u) menší než $u_n + \varepsilon$, a tedy náleží $u_n + \varepsilon$ do skupiny druhé i horní, pročež platí

$$u_n < A \leqq u_n + \varepsilon,$$

kde znamení rovnosti může míti místa jen při racionálném A. Tím číslo A sevřeno dvěma racionálnými čísly o libovolně malém rozdílu ε.

Vyskytují-li se v posloupnosti nikdy neklesající stejné členy, ovšem po sobě jdoucí, možno z nich jen jeden podržeti, ostatní vynechati, aniž by se změnila definice obou skupin, a tedy i definice čísla A. Z toho jde, že možno o dané posloupnosti přímo předpokládati, že jest stále stoupající, t. j. že

$$u_1 < u_2 < u_3 < \ldots$$

Jsou-li v posloupnosti stoupající všecky členy záporné a stává-li se u_n číselně libovolně malé pro dosti velké n, stanoví posloupnost číslo 0. Číslo $0 > u_n$ patří totiž do horní skupiny vzhledem k stanovenému číslu A, takže $0 \leqq A$; kdyby $0 < A$, patřila by 0 do dolní skupiny a v té by se vyskytlo číslo u_n větší nully, věc nemožná, poněvadž všecka $u_n < 0$. Máme tedy $0 = A$.

Zcela obdobné úvahy možno učiniti o posloupnosti racionálných čísel nikdy nestoupající, jejíž členy jsou větší než dané číslo U; posloupnost taková stanoví vždy racionálné neb irracionálné číslo obsažené mezi u_n a $u_n - \varepsilon$, kde ε značí libovolné malé kladné racionálné číslo a n index závislý ovšem na ε.

6. **Pojem racionálné limity.**

O nekonečné posloupnosti racionálných čísel

(3) $$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

pravíme, že má za *limitu* č. *mez* racionálné číslo U, jestliže ku každému kladnému racionálnému číslu ε přísluší kladné celistvé p takové, že pro všecky indexy $n > p$ platí nerovnost

$$| U - u_n | < \varepsilon^*).$$

Výrok, že posloupnost (3) má za limitu U, se také vyjadřuje ve tvaru rovnosti

$$\lim_{n=\infty} u_n = U.$$

Racionálná limita U posloupnosti (3) může býti jen jediná; neboť kdyby také $U' - u_n$ se stávalo číselně libovolně malým, platilo by totéž o rozdílu $U - u_n - (U' - u_n)$, t. j. $U - U'$ by bylo číslo číselně menší než libovolně malé kladné číslo, což by vyjadřovalo rovnost $U = U'$.

Z této definice ihned vychází, že v případě, kdy posloupnost (3) nemá za limitu racionálné číslo U, nutně existuje kladné racionálné číslo ε' o následující vlastnosti: nechť jest celistvé kladné p jakékoli, vždy existuje celistvé $n > p$, pro něž platí

$$| U - u_n | \geqq \varepsilon'.$$

Popírati existenci čísla ε' znamená tolik jako tvrditi, že existuje při každém kladném ε alespoň jedno kladné celistvé p takové, že pro žádné $n > p$ neplatí

$$| U - u_n | \geqq \varepsilon,$$

že tedy pro všecka $n > p$ platí

$$| U - u_n | < \varepsilon,$$

*) Symbolem $| a |$ značíme absolutní č. číselnou hodnotu čísla a, tak že $| - a | = | a |$ jest vždy kladné; n. p. $| 2 | = 2$, $| - 2 | = 2$, $| - 1/3 | = 1/3$.

t. j. že posloupnost (3) má za limitu číslo U, což jest odpor z onoho popírání plynoucí.

Speciálně má posloupnost (3) za limitu 0, t. j.

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0,$$

platí-li při libovolném kladném racionálném ε nerovnost

$$| u_n | < \varepsilon$$

pro $n > p$, kde p jest kladné celistvé číslo, obecně na ε závislé. N. p. posloupnost

$$1+1,\quad 1+\frac{1}{2},\quad 1+\frac{1}{3},\quad 1+\frac{1}{4},\quad \ldots,\quad 1+\frac{1}{n},\ \ldots$$

má za limitu 1; máme totiž

$$1+\frac{1}{n}-1<\varepsilon, \text{ jakmile } n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Posloupnost

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$$

má za limitu 0, poněvadž

$$\left|\pm\frac{1}{2^n}\right|<\varepsilon, \text{ jakmile } n>-\frac{\log\varepsilon}{\log 2}.$$

7. Posloupnosti konvergující.

Posloupnost racionálných čísel

(4) $$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots$$

sluje konvergující, možno-li libovolnému kladnému racionálnému ε vždy přiřaditi celistvé kladné p takové, že při $n > p$ platí

(5) $$| u_{n+\nu} - u_n | < \varepsilon,$$

nechť jest $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ jakékoli. — Patrně pak při $r > n$, $s > n$, $n > p$ platí*)

$$| a_r - a_n - (a_s - a_n) | \leqq | a_r - a_n | + | a_s - a_n | < 2\varepsilon,$$

t. j. $$| a_r - a_s | < 2\varepsilon$$

při $r > p+1$, $s > p+1$, a naopak: platí-li tato nerovnost pro dosti velké r, s, stačí vziti $s = p+2$ a $r > s$, abychom obdrželi nerovnost (5) a zjistili konvergenci posloupnosti (4).

*) Zde užito nerovnosti $| a + b | \leqq | a | + | b |$ platné patrně pro každá dvě racionálná čísla a, b, kladná neb záporná.

Posloupnost (4) *jest konvergující, možno-li pro každé kladné racionálné* ε *udati* n *takové, že*

$$| u_{n+\nu} - u_n | < \varepsilon, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Abychom to dokázali, volme p takové, aby pro každé ν

$$| u_{p+\nu} - u_p | < \frac{\varepsilon}{2};$$

pak při $n > p$ platí obě nerovnosti

$$| u_n - u_p | < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad | u_{n+\nu} - u_p | < \frac{\varepsilon}{2},$$

z nichž

$$| u_{n+\nu} - u_p - (u_n - u_p) | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

t. j.

$$| u_{n+\nu} - u_n | < \varepsilon$$

při $n > p$, jak bylo dokázati.

Nekonečná posloupnost racionálných čísel (4) nikdy neklesající, jejíž členy jsou menší než určité racionálné číslo U, jest konvergující; v čl. 5. jsme totiž dokázali, že pro ni platí nerovnost (5). Obdobně plyne, že nekonečná posloupnost racionálných čísel nikdy nestoupající, jejíž členy jsou větší než určité číslo racionálné V, jest též konvergující.

Členy u_n *konvergující posloupnosti racionálných čísel* (4), *jež nemá za limitu* 0, *jsou od jistého indexu* n *všecky téhož znamení a číselně větší než jisté racionálné kladné číslo* η.

Dle nerovnosti (5) soudíme, že $u_{n+\nu}$ jest mezi čísly $u_n + \varepsilon$ a $u_n - \varepsilon$, jichž rozdíl 2ε možno voliti libovolně malým. Jsou-li tato dvě čísla téhož znamení a není-li žádné z nich nullou, jest věta patrně dokázána; stačí za η položiti menší z obou hodnot $| u_n + \varepsilon |$ a $| u_n - \varepsilon |$. Jsou-li ale čísla $u_n + \varepsilon$ a $u_n - \varepsilon$ různých znamení aneb jestli jedno z nich nullou, tu vzhledem k jich rozdílu 2ε soudíme, že každé číslo mezi ně zapadající jest číselně menší než 2ε, že tedy limita posloupnosti (4) jest 0.

8. **Definice čísel konvergujícími posloupnostmi.**

Budiž

$$u_1, u_2, u_3, \ldots \tag{6}$$

konvergující posloupnost racionálných čísel; tato buď má za limitu racionálné číslo U, a pak pravíme, že posloupnost (6)

definuje číslo U, aneb nemá žádné racionálné číslo za limitu, a pak možno její pomocí všecka racionálná čísla roztříditi na dvě skupiny, definující číslo irracionálné.

Budiž v druhém případě a libovolné číslo racionálné, a utvořme posloupnost racionálných čísel

$$u_1 - a,\ u_2 - a,\ u_3 - a,\ \ldots ; \tag{7}$$

vzhledem k

$$| u_{n+\nu} - a - (u_n - a) | = | u_{n+\nu} - u_n | < \varepsilon,\ n > p$$

jest to posloupnost konvergující; ona nemá 0 za limitu, neboť by pak (4) měla a za limitu, číslo racionálné, což jest proti supposici. Dle předchozího článku budou členy posloupnosti (7) od jistého indexu všecky kladná neb všecky záporná čísla; v případě prvním zařadíme a do dolní, v případě druhém do horní skupiny, při čemž jest zřejmo, že každé číslo dolní skupiny bude menší než každé číslo skupiny horní.

Ve skupině dolní neexistuje čísla největšího; je-li totiž a číslo skupiny dolní, jsou všecky členy posloupnosti (7) od jistého indexu kladné a větší než určité kladné číslo η (čl. 7.):

$$u_n - a > \eta, \qquad n > p,$$

a volíme-li b mezi a a $a + \eta$, máme

$$u_n - b > u_n - a - \eta > 0, \qquad n > p,$$

t. j. od téhož indexu jsou všecky členy posloupnosti

$$u_1 - b,\ u_2 - b,\ u_3 - b,\ \ldots$$

kladné, a tudíž náleží také do dolní skupiny číslo $b > a$.

Právě tak bychom mohli ukázati, že v horní skupině není čísla nejmenšího.

Obě skupiny mají tedy vlastnosti, jichž se vymáhá k definici čísla irracionálného; toto číslo U jimi definované označíme jako číslo irracionálné definované posloupností (6).

Číslo U, ať racionálné neb irracionálné, které každá konvergující posloupnost (6) definuje, jest obsaženo mezi každými dvěma racionálnými čísly a, $b > a$ takovými, že mezi nimi jsou obsaženy všecky členy posloupnosti (6) od jistého indexu počínaje. V případě irracionálného U jest to patrné, neboť a náleží do dolní, b do horní skupiny právě definované. V případě racionálného U ale nemůže $b < \mathrm{U}$, neboť by pak z nerovností

$$u_n < b < \mathrm{U}, \qquad n > p,$$

vycházelo, že $U - u_n$ jest větší než $U - b$, věc nemožná, poněvadž U jest lim u_n, a tedy $U - u_n$ číselně libovolně malé; obdobně vychází nemožnost nerovnosti $a > U$, a musí tedy

$$a \leqq U \leqq b.$$

Ale i opak jest patrný: je-li číslo U, definované konvergující posloupnosti (6), obsaženo mezi dvěma racionálnými čísly a, b, jsou od jistého indexu všecky členy této posloupnosti obsaženy mezi a a b.

Speciálně tím vychází, že konvergující posloupnost (6) definuje číslo kladné neb záporné dle toho, jsou-li členy posloupnosti od jistého místa větší než určité kladné neb menší než určité záporné racionálné číslo.

Shrneme-li tyto úvahy, vidíme, že každá konvergující posloupnost racionálných čísel definuje číslo racionálné neb irracionálné; ale i naopak možno každé číslo U takovou posloupností definovati. V případě racionálného U možno vzíti za posloupnost (6) posloupnost, jejíž všecky členy jsou U; vždy však posloupnost decimálných zlomků v čl. 3. vytčenou, nechť jest U racionálné neb irracionálné *).

9. **Konvergující posloupnosti, definující totéž číslo neb nestejná čísla.**

Aby dvě konvergující posloupnosti racionálných čísel

(8) $$u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

(9) $$v_1, v_2, v_3, \ldots$$

definovaly totéž číslo, jest nutné a stačí, aby posloupnost

(10) $$u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3, \ldots$$

měla za limitu 0.

Především ukažme, že posloupnost (10) jest konvergující. Z konvergence posloupností (8) a (9) vychází, že k libovolnému kladnému racionálnému ε náleží celistvé kladné p a q takové, že platí

$$| u_{n+\nu} - u_n | < \varepsilon, \; n > p; \quad | v_{n+\nu} - v_n | < \varepsilon, \; n > q;$$

*) *Weierstrass, G. Cantor, E. Heine* a j. definují irracionálná čísla přímo konvergujícími posloupnostmi; sr. *Dr. L. Kraus*, Základové arithmetiky, Čas. pro pěstování mathem. a fysiky, roč. XII. a *E. Heine*, Elemente der Functionenlehre, Crelle-Borchardtův Journal, t. LXXIV. Obšírnější výklad podává *Dr. O. Stolz*, Vorl. über allg. Arithmetik, t. I.

je-li n větší než p i q, platí obě nerovnosti, a tedy také

$$| u_{n+\nu} - u_n - (v_{n+\nu} - v_n) | < \varepsilon + \varepsilon,$$

čili

$$| u_{n+\nu} - v_{n+\nu} - (u_n - v_n) | < 2\varepsilon,$$

jak bylo dokázati.

Aby předně posloupnosti (8) a (9) definovaly totéž racionálné číslo U, jest nutné a stačí, aby

$$\lim_{n=\infty} u_n = U, \quad \lim_{n=\infty} v_n = U,$$

t. j. rozdíly $U - u_n$, $U - v_n$ se staly číselně libovolně malé pro dosti velké n; pak ale jest i rozdíl $U - v_n - (U - u_n)$, t. j. $u_n - v_n$ libovolně malý, t. j. posloupnost (10) má za limitu 0. A naopak, je-li tomu tak a definuje-li (8) racionálné číslo U, definuje (9) totéž číslo, neboť pak rozdíl

$$U - v_n = (U - u_n) + (u_n - v_n)$$

se stává číselně libovolně malým pro dosti velké n.

Aby za druhé posloupnosti (8) a (9) definovaly totéž irracionálné číslo U, jest nutnéas tačí, aby oběma byly definovány tytéž dvě skupiny racionálných čísel ve smyslu čl. 8. Značí-li a libovolné racionálné číslo, jest k tomu nutné a stačí, aby od jistého indexu v obou posloupnostech

$$u_1 - a, \; u_2 - a, \; u_3 - a, \; \ldots,$$
$$v_1 - a, \; v_2 - a, \; v_3 - a, \; \ldots$$

byli členové téhož znamení, což vymáhá, aby od jistého indexu rozdíl $u_n - v_n$ byl libovolně malý č. aby posloupnost (10) měla za limitu 0. Kdyby tomu totiž tak nebylo, tu by členové konvergující posloupnosti (10) od jistého indexu byli stálého znamení a číselně větší než určité kladné racionálné číslo ε, tedy by n. p. $u_n - v_n > \varepsilon$, jakmile $n > p$; supponujme $q > p$ tak velké, že

$$| u_{q+\nu} - u_q | < \varepsilon', \quad | v_{q+\nu} - v_q | < \varepsilon',$$

kde ε' jest libovolně malé kladné racionálné číslo; pak při každém ν bude $u_{q+\nu}$ mezi $u_q - \varepsilon'$ a $u_q + \varepsilon'$, a $v_{q+\nu}$ mezi $v_q - \varepsilon'$ a $v_q + \varepsilon'$. Vzhledem k $u_q - v_q > \varepsilon$, možno voliti ε' tak malé, že

$$v_q - \varepsilon' < v_q + \varepsilon' < u_q - \varepsilon' < u_q + \varepsilon',$$

a tedy také

$$v_{q+\nu} < v_q + \varepsilon' < u_q - \varepsilon' < u_{q+\nu}.$$

Volíme-li tedy racionálné a mezi $v_q + \varepsilon'$ a $u_q - \varepsilon'$, platí nerovnosti

$$v_{q+\nu} < a < u_{q+\nu},$$

a byly by tedy všecky rozdíly $u_n - a$ od indexu $n = q$ kladné, a všecky rozdíly $v_n - a$ od téhož indexu záporné, proti supposici.

Avšak výminka $\lim_{n=\infty} (u_n - v_n) = 0$ také stačí, aby posloupnosti (8) a (9) definovaly totéž irracionálné číslo. Značí-li a libovolné racionálné číslo, tu rozdíly $u_n - a$ mají od jistého n stálé znamení, n. p. kladné, jsouce větší než určité kladné číslo ε. Dle učiněné supposice platí pro libovolné kladné racionálné ε' nerovnost

$$| u_n - v_n | < \varepsilon', \quad n > p,$$

t. j. u_n se různí od v_n o hodnotu h, jež od jistého indexu jest číselně menší než ε'. Tím nerovnost $u_n - a > \varepsilon$ možno psáti

$$v_n + h - a > \varepsilon, \; v_n - a > \varepsilon - h > \varepsilon - \varepsilon',$$

z čehož, volíce $\varepsilon' < \varepsilon$, soudíme, že rozdíly $v_n - a$ jsou od jistého indexu všecky kladné, jak bylo dokázati.

Definují-li konvergující posloupnosti čísla U a V, jest $U > V$, definuje-li posloupnost (10) číslo kladné; $U < V$, definuje-li tato posloupnost číslo záporné, a naopak.

Definuje-li (10) n. p. číslo kladné, jest $u_n - v_n$ od jistého indexu větší než jisté kladné racionálné ε, t. j. $u_n - v_n > \varepsilon$, $n > p$. Opět možno kladné racionálné ε' voliti tak malé a $q > p$ tak velké, že

$$v_q - \varepsilon' < V < v_q + \varepsilon' < u_q - \varepsilon' < U < u_q + \varepsilon',$$

z čehož patrna nerovnost $V < U$. A naopak, platí-li tato nerovnost, existují racionálná c taková, že (čl. 2.)

$$V < c < U,$$

a možno tedy vytknouti racionálná čísla a, b, c', c'' taková, aby

$$a < V < c' < c'' < U < b;$$

od jistého indexu jsou všecka u_n mezi c'' a b, a všecka v_n mezi a a c', a tedy jest od onoho indexu $u_n - v_n > c'' - c' > 0$, t. j. posloupnost (10) definuje číslo kladné.

10 Početní úkony s čísly reálnými: sčítání a odčítání.

Čísla racionálná a irracionálná shrnujeme pod názvem *čísel reálných.*

Buďte U a V dvě reálná čísla definovaná konvergujícími posloupnostmi o racionálných členech

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, \tag{11}$$

$$v_1, v_2, v_3, \ldots; \tag{12}$$

pak jest posloupnost

$$u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots \tag{13}$$

také konvergující a číslo W, *jež definuje, sluje součtem* U + V.

Z konvergence posloupnosti soudíme, že

$$| u_{n+\nu} - u_n | < \varepsilon, \quad | v_{n+\nu} - v_n | < \varepsilon, \; n > p,$$

a tedy

$$| u_{n+\nu} - u_n + v_{n+\nu} - v_n | = | u_{n+\nu} + v_{n+\nu} - (u_n + v_n) | < 2\varepsilon, \quad n > p,$$

čímž dokázána konvergence posloupností (13).

Číslo U + V touto posloupností definované musí záviseti jen na U a V, a nikoli na tom, jakou posloupností tato čísla definujeme. Abychom nahlédli, že tomu tak jest, definujme čísla U a V jinými posloupnostmi konvergujícími

$$u'_1, u'_2, u'_3, \ldots,$$
$$v'_1, v'_2, v'_3, \ldots;$$

ovšem pak musí $\lim (u_n - u'_n) = 0$, $\lim (v_n - v'_n) = 0$ pro $n = \infty$. Pak ale také $u_n + v_n - (u'_n + v'_n)$ se stává číselně libovolně malým pro dosti velké n, t. j. posloupnost (13) definuje skutečně totéž číslo jako posloupnost

$$u'_1 + v'_1, \quad u'_2 + v'_2, \quad u'_3 + v'_3, \ldots$$

Součet U + V právě definovaný jest v případě racionálných U a V součtem těchto racionálných čísel; v případě tom jest

$$| U - u_n | < \varepsilon, \quad | V - v_n | < \varepsilon, \quad n > p,$$

kde ε značí libovolně malé kladné a racionálné číslo, a tedy jest též

$$| U + V - (u_n + v_n) | < 2\varepsilon,$$

t. j. součet U + V skutečně definován posloupností (13).

Patrně platí rovnosti

$$U + V = V + U, \quad U + (V + W) = U + V + W, \quad U + 0 = U$$

pro každá tři reálná čísla U, V, W; třetí rovnost jest patrna, uvážíme-li, že možno 0 definovati posloupností, jejíž všecky členy jsou 0.

Rozdílem U — V *nazýváme číslo definované konvergující posloupností*

$$u_1 - v_1, \quad u_2 - v_2, \quad u_3 - v_3, \ldots;$$

číslo to se opět nemění, nahradíme-li posloupnosti (11) a (12) jinými, však definujícími táž čísla U, V, a v případě racionálných U, V jest totožné s číslem U — V, jakož se čtenář snadno sám přesvědčí.

Patrně platí

$$(U - V) + V = U,$$

neboť číslo na levé straně definuje posloupnost o obecném členu

$$(u_n - v_n) + v_n, \text{ t. j. } u_n.$$

Číslo 0 — U čili — U jest definováno posloupností o obecném členu $0 - u_n$ čili $-u_n$.

11. Násobení a dělení čísly reálnými.

Součinem UV *čísel* U *a* V *definovaných posloupnostmi* (11) *a* (12) *rozumíme číslo definované posloupností*

$$u_1 v_1, \quad u_2 v_2, \quad u_3 v_3, \ldots \tag{14}$$

Že tato posloupnost konverguje, vychází snadno z totožnosti

$$u_{n+\nu} v_{n+\nu} - u_n v_n = u_n (v_{n+\nu} - v_n) + v_n (u_{n+\nu} - u_n) + (u_{n+\nu} - u_n)(v_{n+\nu} - v_n);$$

pro dosti velké n platí při každém ν

$$| u_{n+\nu} - u_n | < \varepsilon, \quad | v_{n+\nu} - v_n | < \varepsilon,$$

kde ε značí libovolně malé kladné reálné číslo, a tedy platí také

$$| u_{n+\nu} v_{n+\nu} - u_n v_n | < \varepsilon A + \varepsilon A + \varepsilon A = 3\varepsilon A,$$

je-li A kladné racionálné číslo větší než každé u_n, v_n a větší než ε. Stává se tedy levá strana pro dosti velké n libovolně malou, čímž konvergence posloupnosti (14) dokázána.

V případě racionálných U a V definuje posloupnost (14) číslo U . V; pak totiž rozdíly $U - u_n$, $V - v_n$ jsou číselně libovolně malé pro dosti velké n. a tedy

$$U = u_n + \alpha, \quad V = v_n + \beta,$$

kde α, β se stávají číselně libovolně malými; pak

$$| UV - u_n v_n | = | \alpha v_n + \beta u_n + \alpha\beta | < 3\varepsilon A,$$

značí-li ε větší z kladných hodnot $|\alpha|, |\beta|$, a tedy jest levá strana číselně libovolně malá pro dosti velké n, t. j. racionálné číslo UV jest definováno posloupností (14).

Součin dvou reálných čísel UV vymizí tenkrát a jen tenkrát, tedy alespoň jeden z činitelů U, V jest 0. Není-li totiž žádný z nich 0, tu členy obou posloupností (11), (12) jsou od jistého indexu číselně větší než určitá kladná čísla, a tedy jest také součin $u_n v_n$ od onoho indexu číselně větší než určité kladné číslo, t. j. (14) definuje číslo různé od 0. Je-li ale jeden z činitelů U, V nullou, neb oba dva, definuje (14) patrně číslo 0.

Patrně platí pro reálná čísla racionálná i irracionálná,

$$U(-U) = -UV, \quad (-U)(-V) = UV,$$
$$(U + V)W = UW + VW;$$

je-li $U < V$ jest při kladném W též $UW < VW$, a při záporném W jest $UW > VW$.

Podílem dvou čísel U : V, *definovaných posloupnostmi* (11) *a* (12), *rozumíme číslo* W *hovící požadavku* $VW = U$; *není-li* $V = 0$, *existuje jediné takové číslo a to jest definováno posloupností*

$$\frac{u_1}{v_1}, \quad \frac{u_2}{v_2}, \quad \frac{u_3}{v_3}, \ldots \tag{15}$$

Je-li $V = 0$ jest $VW = 0$ při každém W, a požadavek $VW = U$ při $U \gtrless 0$ nelze vyplniti, při $U = 0$ jest každým W vyplněn; vzhledem k tomu nepřipisujeme podílu, jehož dělitel jest 0, žádného významu.

Předpokládejme tedy $V \gtrless 0$; pak v_n má od jistého indexu stálé znamení, jsouc číselně větší než určité kladné číslo, a mají tedy od onoho indexu členy posloupnosti (15) význam. V členech předcházejících se může ve jmenovateli vyskytnouti 0; vynecháním těchto bezvýznamných symbolů se však číslo, definované posloupností (15), nezmění, ač je-li konvergence této posloupnosti zjištěna. To se ale snadno stane totožností

$$\frac{u_{n+\nu}}{v_{n+\nu}} - \frac{u_n}{v_n} = \frac{v_n(u_{n+\nu} - u_n) - u_n(v_{n+\nu} - v_n)}{v_n v_{n+\nu}},$$

v níž jmenovatel na pravo jest pro dosti velké n číselně větší než určité kladné číslo, a jejíž čítatel vzhledem k nerovnostem

$$| u_{n+\nu} - u_n | < \varepsilon, \quad | v_{n+\nu} - v_n | < \varepsilon, \qquad n > p$$

se stává číselně libovolně malým pro dosti velké n, nechť je ν jakékoli.

Číslo W, definované posloupností (15), jest podílem U : V, neboť součin VW jest patrně definován posloupností (12); a že tento podíl jest jediný, vychází z poslední poznámky, učiněné o násobení, dle níž $W' \gtrless W$ dává součin VW', různý od VW t. j. od U. Poněvadž jsme podíl ten poznali za jediný, netřeba ani dokazovati, že se nemění, počítáme-li jej pomocí jiných posloupností, definujících čísla U a V, ač i důkaz ten by byl zcela snadným.

Konečně budiž podotknuto, že by bylo snadné, skonstatovati platnost zákonů divise s čísly racionálnými i pro divisi čísel irracionálných.

Opakováním násobení docházíme k mocnění, a sečítáním násobků mocnin k polynomům; z toho patrno, že polynom utvořený z hodnot racionálných neb irracionálných U, V, . ., n. p.: $aU^2 + bUV + cV^2$, pomocí racionálných koefficientů a, b, c, jest číslo definované konvergující posloupností o obecném členu racionálném

$$au_n^2 + bu_nv_n + cv_n^2,$$

jsou-li u_1, u_2. . . a v_1, v_2, . . posloupnosti racionálných čísel definující U a V. A pod. v případě irracionálných koefficientů, a v případě podílu dvou polynomů.

12. Konvergující posloupnosti o reálných členech.

Uvažování posloupností o členech racionálných vedlo k číslům irracionálným, a mohlo by se zdáti, že uvažování posloupností o členech irracionálných by vedlo k dalšímu rozšíření oboru číselného; tomu ale není tak, ač nic nevadí počítání s takovými posloupnostmi.

Posloupnost

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots \tag{16}$$

o členech reálných, t. j. racionálných neb irracionálných, sluje konvergující, existuje-li k libovolnému kladnému číslu ε celistvé

kladné p takové, že při $n > p$ platí nerovnost

$$| u_{n+\nu} - u_n | < \varepsilon,$$

nechť jest $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ jakékoli.

O posloupnosti (16) pravíme, že má za limitu číslo U, racionálné neb irracionálné, existuje-li k libovolnému kladnému ε celistvé kladné číslo p takové, že při $n > p$ platí

$$| U - u_n | < \varepsilon.$$

Úvahy provedené s posloupnostmi o členech racionálných možno ihned převésti na posloupnost (16) případným vynecháváním slůvka „racionálný“.

N. p. není-li číslo a limitou posloupnosti konvergující (16), budou členy posloupnosti

$$u_1 - a, \quad u_2 - a, \quad u_3 - a, \ldots$$

od jistého indexu všecky téhož znamení a číselně větší než určité kladné číslo.

Na základě toho možno ukázati, jako v čl. 8., že každá konvergující posloupnost (16) buď má za limitu číslo racionálné aneb definuje číslo irracionálné; v druhém případě totiž definujeme pomocí (16) opět dvě skupiny zahrnující všecka čísla racionálná tím, že klademe číslo racionálné a do skupiny dolní, jsou-li členy posloupnosti

$$u_1 - a, \quad u_2 - a, \quad u_3 - a, \ldots$$

od jistého místa stále kladné, a do skupiny horní, jsou-li stále záporné.

Z toho patrno, že posloupnosti (16) nevedou k novým číslům.

13. **Totožnost limity posloupnosti s definovaným číslem.**

Číslo definované konvergující posloupností jest zároveň její limitou.

Je-li číslo to racionálné, jest výrok totožný s definicí onoho čísla; je-li ale irracionálné, dokážeme větu takto.

Budiž

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

konvergující posloupnost definující irracionálné číslo U, a buďte a, b dvě racionálná čísla, mezi něž zapadá U. Pak soudíme právě tak, jako v čl. 8., že od jistého indexu všecky členy po-

sloupnosti budou mezi a a b, a tedy rozdíly $U - u_n$ číselně menší než $|a - b|$, kteréž číslo možno předpokládati libovolně malým. Jest tedy U limitou posloupnosti.

Naopak jest i každá posloupnost, jež má limitu, konvergující; neboť z

$$|U - u_n| < \varepsilon, \quad n > p,$$

soudíme

$$|U - u_{n+\nu}| < \varepsilon,$$

a tedy i

$$|U - u_n - (U - u_{n+\nu})| = |u_{n+\nu} - u_n| < 2\varepsilon, \quad n > p.$$

Tím nalézáme, že nutná a postačující výjimka k existenci limity posloupnosti o reálných členech jest její konvergence.

Tak jako v čl. 5. možno i zde dokázati, že nekonečná posloupnost o reálných členech menších než určité číslo a nikdy neklesající, jest konvergentní, a má tedy limitu; a že totéž platí o posloupnosti reálných čísel větších než určité číslo a nikdy nestoupající. Limita ta v prvním případě nemůže býti menší, než kterýkoli člen posloupnosti, a v druhém nemůže býti větší; rovnost s některým členem patrně nastává jen tenkráte, kdy tento člen se od jistého indexu stále vyskytuje.

14. Geometrické znázornění čísel reálných.

Toto znázornění podávají již elementy geometrie, v nichž se učí, že každá přímá délka vzhledem k zvolené jednotce délkové č. míře jest buď racionálná, t. j. že jest možno ji vyčerpati touto měrou aneb několikátým dílem jejím, aneb že tomu není tak, že jest nesměrná; pak možno udati směrné délky blížící se jí s libovolnou přesností.

Ukažme, že i naopak každé irracionálné číslo možno znázorniti jistou délku. Budiž U kladné irracionálné číslo, vytknuté jak konvergující posloupností kladných racionálných čísel nikdy neklesající

$$u_1, u_2, u_3, \ldots,$$

tak posloupností nikdy nestoupající racionálných kladných čísel

$$v_1, v_2, v_3, \ldots;$$

za posloupnosti ty možno n. p. voliti ony, jež jsme v čl. 3. seznali. Racionálná čísla první posloupnosti znázorněme délkami

OA_1, OA_2, ... a členy druhé posloupnosti délkami OB_1, OB_2, .. na přímce od téhož bodu O a týmž směrem naměřenými pomocí určité lineárné jednotky.

Poněvadž pro každý index platí $u_n < v_m$, bude i $OA_n < OB_m$, t. j. nekonečné množství bodů A_1, A_2, .. bude úplně odděleno od bodů B_1, B_2, ...; a poněvadž rozdíl

$$OB_m - OA_n = v_m - u_n = (v_m - U) - (u_n - U)$$

pro dosti velké n a m se stává číselně libovolně malým, nemohou býti obě skupiny bodové odděleny nějakou, třeba i sebe menší délkou, nýbrž jsou odděleny jediným bodem M. Délka OM pak znázorňuje irracionálné číslo U.

Je-li irracionálné číslo U dáno jakoukoli konvergující posloupností racionálných čísel, není nesnadno stanoviti totéž číslo dvěma posloupnostmi nikdy neklesající resp. nikdy nestoupající, jakých vymáhá předchozí úvaha. K tomu cíli služtež následující poznámky, kterými si povahu konvergující posloupnosti objasníme.

„Vynecháním libovolného počtu členů konvergující posloupnosti u_1, u_2, u_3, .. vzniká nová konvergující posloupnost u'_1, u'_2, u'_3, ... definující totéž číslo jako původní.“ Ze supposice, že $u_{n+\nu} - u_n$ klesá pro dosti velké n číselně pod libovolně malé kladné číslo, vychází patrně totéž o rozdílu $u'_{n+\nu} - u'_n$, a z fakta, že $U - u_n$ jest hodnota číselně libovolně malá, plyne totéž o rozdílu $U - u'_n$ pro dosti velké n.

„Vyskytuje-li se v konvergující posloupnosti u_1, u_2, u_3, .. nějaký člen c bezpočtukráte, jest posloupností definováno číslo c.“ Za každým členem u_n se vyskytuje člen c, a jest tedy pro dosti velké n rozdíl $c - u_n$ číselně libovolně malý.

V konvergující posloupnosti, neobsahující žádný člen bezpočtukráte, tedy každý člen jen na konečném počtu míst, dovoleno každý člen podržeti na jediném místě, třeba tam, kde se ponejprve vyskytuje, a ostatní s ním stejné členy vynechati; nová posloupnost, jež patrně konverguje k témuž číslu jako původní, bude se skládati ze členů naskrze různých.

Stanoví-li konvergující posloupnost u_1, u_2, u_3, ... číslo U, jest $|U - u_n| < \varepsilon$ při $n > p$; volíce $\varepsilon' < \varepsilon$, bude obdobně $|U - u_n| < \varepsilon'$ při $n > q > p$; volíce $q'' < \varepsilon'$, bude $|U - u_n| < \varepsilon''$

při $n > r > q$, atd. Možno tedy vytknouti indexy $n < n_1 < n_2 < \ldots$ bez konce rostoucí a takové, že rozdíly

$$U - u_n,\ U - u_{n_1},\ U - u_{n_2},\ \ldots$$

se stávají ustavičně číselně menšími.

Posloupnost u_n, u_{n_1}, u_{n_2}, . . . stanoví pak dle předchozí poznámky také číslo U. V ní se vyskytne buď nekonečně mnoho členů menších než U a tvořících tedy posloupnost stále stoupající, aneb nekonečně mnoho členů větších než U a tvořících tedy posloupnost stále klesající a stanovící v obou případech ovšem také číslo U, aneb se v ní vyskytnou ty i ony členy v nekonečném množství, čímž máme posloupnosti dvě, stoupající i klesající, definující obě číslo U a vedoucí k předchozímu geometrickému znázornění irracionálného čísla U. — První dva případy možno však vždy na tento třetí převésti. Je-li n. p. U definováno stále stoupající posloupností $u_1 < u_2 < u_3 < \ldots$, stačí U sevříti racionálnými čísly u_1 a v_1, pak u_2 a v_2, pak u_3 a v_3, . ., jichž rozdílům tak ubývá, že $v_1 > v_2 > v_3 > \ldots$ a že $\lim (v_n - u_n) = 0$ pro $n = \infty$.

15. **Čísla komplexní č. soujemná.**

Zavedením čísel irracionálných umožněno řešení rovnic, jež by jinak neměly řešení; n. p. rovnice $x^s = b$, kde s jest celistvé číslo větší než 1, a b libovolné kladné číslo racionálné neb irracionálné, možno pak vždy vyhověti kladným číslem x, kdežto racionálné x hoví jen tenkráte, kdy b jest s-tá mocnost čísla racionálného. Hodnotu x lze vždy snadno stanoviti konvergující posloupností. Stačí vyhledati celistvé číslo α takové, že $\alpha^s < b \leqq (\alpha + 1)^s$; platí-li $b = (\alpha + 1)^s$, jest $x = \alpha + 1$, jinak vyhledejme číslo celistvé $\beta \leqq 9$ (počet desetin) takové, že $\alpha \cdot \beta^s < b \leqq \alpha \cdot \beta_1^s$, kde $\beta_1 = \beta + 1$, a je-li $b = \alpha \cdot \beta_1^s$, jest $x = \alpha \cdot \beta_1$, jinak vyhledejme celistvé $\gamma \leqq 9$ takové, aby $\alpha \cdot \beta\gamma^s < b < \alpha \cdot \beta\gamma_1^s$, kde $\gamma_1 = \gamma + 1$, atd. Tím nalezneme pro x buď konečný decimálný zlomek, aneb hodnotu stanovenou konvergující posloupností

$$(\alpha,\ \alpha \cdot \beta,\ \alpha \cdot \beta\gamma,\ \ldots).$$

Nalezená hodnota jest jediná kladná hodnota hovící rovnici $x^s = b$; neboť při $x_1^s = b$ by platilo

$$x_1^s - x^s = (x_1 - x)\,(x_1^{s-1} + x_1^{s-2}\,x + x_1^{s-3}\,x^2 + \ldots + x^{s-1}) = 0;$$

druhý faktor jest patrně kladné číslo, musí tedy vymizeti první, t. j. $x_1 = x$.

Jsou však rovnice, a velmi jednoduché, jež nejsou ani v oboru čísel racionálných a irracionálných řešitelny, n. p. rovnice $x^2 = -4$; jest totiž čtverec každého reálného čísla číslem kladným. Abychom tuto, a vůbec každou algebraickou rovnici učinili řešitelnou, rozšíříme dosavadní obor číselný utvořením nových čísel, t. čísel komplexních č. imaginárných. Čísla ta jsou utvořena pomocí imaginárné jednotky i, kterou definujeme jakožto číslo, jehož čtverec jest -1, tedy $i^2 = -1$ čili $i = \sqrt{-1}$; komplexním číslem zveme pak každé číslo tvaru $a + b\sqrt{-1}$, jsou-li a, b čísla reálná, a tu zveme a jeho reálnou, $b\sqrt{-1}$ jeho ryze imaginárnou částí.

Obor komplexních čísel zahrnuje všecka čísla reálná: obdržíme je kladouce 0 za b.

Dvě komplexní čísla $a + bi$, $a' + b'i$ nazýváme stejnými, platí-li rovnosti $a = a'$, $b = b'$. Komplexní číslo $a + bi$ vymizí, je-li číslem $0 + 0i$, t. j. platí-li $a = 0$, $b = 0$.

Všecka komplexní čísla možno znázorniti body v rovině. Veďme v rovině dvě pravoúhlé osy souřadné Ox, Oy a vytkněme bod M o souřadnicích $x = a$, $y = b$ jakožto bod znázorňující veličinu $a + bi$; ovšem nutno dříve zvoliti nějakou délku za lineárnou jednotku, načež čísla a, b stanoví určité délky. Body znázorňující veličiny reálné $a + io$ budou na ose Ox, pročež tato sluje osou reálnou, a body znázorňující ryze imaginárné hodnoty $o + bi$ budou na ose Oy č. na imaginárné ose. Počátek O znázorňuje hodnotu 0.

Dvě komplexní veličiny $a + bi$, $a - bi$, jež se různí jen znamením koefficientu při i, slují konjugované č. sdružené; body je znázorňující jsou symmetrické vzhledem k reálné ose.

Geometrické znázornění vede k t. z. normálnému tvaru komplexní veličiny $a + bi$ tím, že pravoúhlé souřadnice a, b vyjádříme souřadnicemi polárnými ϱ, ω, při čemž počátek O béřeme za pól a reálnou osu Ox za osu polárnou. Značí tedy ϱ kladně vzatou délku OM, a ω úhel sevřený rameny Ox, OM.

Tím jsme vedeni k tomu, abychom položili

$$a = \varrho \cos \omega, \quad b = \varrho \sin \omega,$$

z čehož

$$\varrho = +\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \omega = \frac{a}{\varrho}, \quad \sin \omega = \frac{b}{\varrho}.$$

Uhel ω daný svým cos. a sin. není úplně stanoven; jeden takový úhel ω_0 se nalezne vždy v mezích 0^0 a 360^0, a přidáním neb odejmutím libovolného počtu plných úhlů plynou všecky ostatní úhly $\omega = \omega_0 \pm k\,360^0$ hovící napsaným rovnicím. Úhel ω_0 jest patrně úhel, o který nutno rameno Ox kolem bodu O otočiti ve směru 90^0-ové rotace převádějící osu Ox do osy Oy, aby dospělo do polohy OM.

Kladná hodnota ϱ sluje modulem čili absolutní neb číselnou hodnotou čísla $a + bi$ a značí se symbolem $| a + bi |$ aneb mod. $(a + bi)$; úhel ω sluje argumentem jejím. V případě reálné veličiny a se její absolutní hodnota $\varrho = + \sqrt{a^2}$ shoduje s číselnou hodnotou $| a |$ již dříve definovanou.

Tvar

$$\varrho\ (\cos\omega + i \sin\omega),$$

do nějž přechází komplexní veličina $a + bi$ zavedením hodnot ϱ, ω na místo a, b, sluje tvarem normálným č. trigonometrickým této veličiny. V tvaru tom jakož i všude jinde nadále budeme úhel ω vyjadřovati v t. z. míře absolutní č. obloukové. Dán-li totiž úhel α^0, vytknou ramena jeho na kružnici opsané kolem vrcholu s libovolným poloměrem oblouk α-stupňový, jehož délka má k poloměru podíl nezávislý na velikosti poloměru, a závislý jen na úhlu; tento podíl ω se zove měrným číslem úhlu α^0 v míře absolutní, č. stručně úhlem α^0 vyjádřeným v míře absolutní. Béřeme-li za poloměr jednotku délkovou, jest ω přímo délkou onoho α- stupňového oblouku; z toho je patrné, že plný úhel jest v absolutní míře dán číslem 2π, kde π značí číslo Ludolfovo, přímý úhel číslem π, pravý úhel číslem $\frac{\pi}{2}$, úhel α^0 číslem ω daným proporcí $\alpha : 180 = \omega : \pi$, z čehož

$$\omega = \frac{\pi\alpha}{180}, \qquad \alpha = \frac{180\,\omega}{\pi}.$$

Tím n. p. při $\omega = 1$ nalézáme $\alpha = \frac{180}{\pi} = 57{\cdot}29578^0 \ldots$, tak že úhel daný v absolutní míře číslem 1 jest přibližně úhel $57^0\,17'\,44''$.

16. **Základní početní úkony s čísly komplexními.**

Součtem dvou komplexních čísel

$$z = a + bi, z_1 = a_1 + b_1 i$$

rozumíme číslo

$$z + z_1 = a + a_1 + (b + b_1)\, i,$$

a jich rozdílem číslo

$$z - z_1 = a - a_1 + (b - b_1)\, i,$$

z čehož patrno, že rozdíl zvětšen o menšitele dává menšence.

Absolutní hodnota součtu nemůže býti větší než součet absolutních hodnot sčítanců; neboť přičteme-li k oběma stranám nerovnosti $2aa_1bb_1 \leqq a^2b_1^2 + b^2a_1^2$ plynoucí z $0 \leqq (ab_1 - ba_1)^2$ hodnotu $a^2a_1^2 + b^2b_1^2$ a odmocníme-li, máme

$$aa_1 + bb_1 \leqq \sqrt{(a^2 + b^2)\ (a_1^2 + b_1^2)}\,.$$

a tedy i

$$a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 + 2\ (aa_1 + bb_1) \leqq a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}\ \ \sqrt{a_1^2 + b_1^2},$$

a odmocněním

$$\sqrt{(a + a_1)^2 + (b + b_1)^2} \leqq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2},$$

jak bylo dokázati pro dva sčítance. Nyní pro součet tří čísel

$$|\, z + z_1 + z_2 \,| \leqq |\, z + z_1 \,| + |\, z_2 \,| \leqq |\, z \,| + |\, z_1 \,| + |\, z_2 \,|,$$

atd. pro každý součet.

Symbolem $-z$ značíme i zde rozdíl $0 - z = -a - bi$. Body znázorňující hodnoty z a $-z$ mají tedy takovou polohu, že bod nullový (počátek) jest uprostřed mezi nimi. Patrně

$$z + (-z_1) = z - z_1.$$

Jsou-li M, M_1 body znázorňující čísla z, z_1, jest čtvrtý vrchol N rovnoběžníku sestrojeného nad stranami OM, OM_1 bodem $z + z_1$.

Poněvadž $\overline{OM} = |\, z \,|$, $\overline{OM_1} = \overline{MN} = |\, z_1 \,|$, $\overline{ON} = |\, z + z_1 \,|$, jsou tyto tři absolutní hodnoty délky stran trojúhelníku OMN, z čehož opět soudíme, že

$$|\, z + z_1 \,| \leqq |\, z \,| + |\, z_1 \,|, \text{ a dále že}$$
$$|\, z + z_1 \,| < \pm\,(\ z\ | - |\, z_1 \,|).$$

Je-li M'_1 bod souměrný k M_1 vzhledem k počátku O, znázorňuje M'_1 číslo $-z_1$, a jest tedy čtvrtý vrchol rovnoběžníku o stranách OM, OM'_1 obrazem hodnoty $z - z_1$.

Bylo by nyní snadno nalézti bod znázorňující součet libovolného počtu komplexních veličin, znázorněných danými body.

Součinem zz_1 zoveme komplexní číslo

$$zz_1 = aa_1 - bb_1 + (ab_1 + ba_1)\,i,$$

vyvozené z daných čísel $a + bi$, $a_1 + b_1 i$ tím, že je násobíme jako by bylo i číslo obyčejné a že nápotom i^2 nahradíme -1.

Součin zz_1 vymizí, je-li alespoň jeden z faktorů 0; vymizení totiž požaduje rovnosti

$$aa_1 - bb_1 = 0,\quad ab_1 + ab_1 = 0,$$

z nichž eliminaci čísla b_1, resp. a_1, odvodíme

$$a_1 (a^2 + b^2) = 0,\quad b_1 (a^2 + b^2) = 0,$$

tak že při $a^2 + b^2 > 0$ máme $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, t. j. $z_1 = 0$, a při $a^2 + b^2 = 0$ ihned $a = 0$, $b = 0$, t. j. $z = 0$.

Podílem $z_1 : z$ nazýváme číslo $z_2 = a_2 + b_2 i$, jehož součin s dělitelem podává dělence; má tedy platiti

$$z_1 = zz_2,\quad \text{t. j. } a_1 + b_1 i = aa_2 - bb_2 + i(ab_2 + ba_2),$$

t. j. čísla a_2, b_2 mají hověti rovnicím

$$aa_2 - bb_2 = a_1,\quad ba_2 + ab_2 = b_1,$$

z nichž řešením při supposici $a^2 + b^2 > 0$,

$$a_2 = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2},\quad b_2 = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2},$$

a tedy konečně

$$\frac{z_1}{z} = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} + \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2}\,i.$$

Podíl $z_1 : z$ jest tedy vždy určité komplexní číslo, kdy dělitel z není 0, t. j. když $a^2 + b^2 > 0$; podíl $z_1 : 0$ nemá žádného významu, jelikož požadavku $z_1 = 0 z_2$ při $z_1 = 0$ hoví každé číslo z_2, a při nenullovém z_1 žádné.

Součin i podíl nabývají přehlednějšího tvaru, užijeme-li tvarů normálných

$$z = \varrho(\cos\omega + i\sin\omega),\quad z_1 = \varrho_1(\cos\omega_1 + i\sin\omega_1),$$

t, j. klademe-li

$$a = \varrho\cos\omega,\quad b = \varrho\sin\omega,\quad a_1 = \varrho_1\cos\omega_1,\quad b_1 = \varrho_1\sin\omega_1.$$

Tím

$$\begin{aligned} zz_1 = {} & \varrho\varrho_1\cos\omega\cos\omega_1 - \varrho\varrho_1\sin\omega\sin\omega_1 \\ & + i(\varrho\varrho_1\cos\omega\sin\omega_1 + \varrho\varrho_1\sin\omega\cos\omega_1), \end{aligned}$$

t. j. $$zz_1 = \varrho\varrho_1 \left(\cos(\omega + \omega_1) + i \sin(\omega + \omega_1.)\right)$$

což jest opět tvar normálný; a pro podíl máme

$$\frac{z_1}{z} = \frac{\varrho\varrho_1 \cos\omega \cos\omega_1 + \varrho\varrho_1 \sin\omega \sin\omega_1}{\varrho^2} + i \frac{\varrho\varrho_1 \cos\omega \sin\omega_1 - \varrho\varrho_1 \sin\omega \cos\omega_1}{\varrho^2},$$

t. j. $$\frac{z_1}{z} = \frac{\varrho_1}{\varrho}\left(\cos(\omega_1 - \omega) + i \sin(\omega_1 - \omega)\right),$$

tedy opět tvar normálný.

V součinu zz_1 jest modul součinem modulů ϱ, ϱ_1 a argument součtem argumentů ω, ω_1, v podílu $z_1 : z$ jest modul $\frac{\varrho_1}{\varrho}$ podílem modulů a argument $\omega_1 - \omega$ rozdílem argumentů čísel z, z_1.

Početní úkony právě definované shodují se s úkony platnými pro čísla reálná v případě, kdy daná komplexní čísla jsou reálná a řídí se patrně týmiž pravidly základními, tak že n. p. i zde platí rovnosti

$$zz_1 = z_1 z, \quad (zz_1) z_2 = (zz_2) z_1, \quad (z + z_1) z_2 = zz_2 + z_1 z_2,$$
$$z - 0 = 0, \quad z\,1 = z.$$

17. Mocnění a odmocňování čísel komplexních.

Máme-li n komplexních čísel v normálných tvarech

$$z_\nu = \varrho_\nu(\cos\omega_\nu + i \sin\omega_\nu), \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

a násobíme-li součin

$$z_1 z_2 = \varrho_1\varrho_2 \left(\cos(\omega_1 + \omega_2) + i \sin(\omega_1 + \omega_2)\right)$$

číslem z_3, obdržíme součin

$$z_1 z_2 z_3 = \varrho_1\varrho_2\varrho_3 \left(\cos(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + i \sin(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\right),$$

atd., až konečně součin všech n čísel

$$z_1 z_2 \ldots z_n = \varrho_1\varrho_2 \ldots \varrho_n [\cos(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n) + i \sin(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n)];$$

modul součinu jest tedy součin modulů všech faktorů, a argument součinu jest součet argumentů faktorů.

Předpokládáme-li $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, vyjde formule

$$z_1^n = \varrho_1^n (\cos n\omega_1 + i \sin n\omega_1),$$

nazvaná *vzorcem Moivre-ovým*; v ní jest n celistvé kladné číslo.

Formule ta platí však i pro záporné celistvé n, jestliže i pro komplexní z_1 symbol z_1^{-n} definujeme podílem $1 : z_1^n$; máme pak

$$z_1^{-n} = \frac{1}{z_1^n} = \frac{1\,(\cos 0 + i \sin 0)}{\varrho_1^n\,(\cos n\omega_1 + \sin n\omega_1)}$$
$$= \frac{1}{\varrho_1^n}\Big[\cos(0 - n\omega_1) + i \sin(0 - n\omega_1)\Big],$$

t. j. $$z_1^{-n} = \varrho_1^{-n}(\cos - n\omega_2 + i \sin - n\omega_1).$$

Učiníme-li ještě sjednání, že z_1^0 značí 1, řídí se násobení a dělení mocností o témž komplexním základu patrně pravidly, platnými pro mocnosti reálného čísla.

Odmocninou n-tou (n celistvé > 1) komplexního čísla $z = \varrho(\cos + i \sin \omega)$, již značíme $\sqrt[n]{z}$, rozumíme číslo $z' = \varrho'(\cos \omega' + i \sin \omega')$ hovící rovnici $z'^n = z$. Máme tedy požadavek

$$\varrho'^n(\cos n\omega' + i \sin n\omega') = \varrho(\cos \omega + i \sin \omega),$$

t. j.

$$\varrho'^n \cos n\omega' = \varrho \cos \omega, \quad \varrho'^n \sin n\omega' = \varrho \sin \omega.$$

Sečtením čtverců těchto rovnic vychází $\varrho'^{2n} = \varrho^2$, a tedy $\varrho'^n = \varrho$ a $\varrho' = \sqrt[n]{\varrho}$, značí-li toto odmocninu arithmetickou z ϱ, t. j. kladné číslo, jehož n-tá mocnost jest ϱ; nyní vidíme, že úhly $n\omega'$ a ω mají míti týž cos. a týž sin., že tedy jsou buď sobě rovny aneb že se různí o celistvý násobek plného úhlu 2π, čímž konečně nalézáme

$$\varrho' = \sqrt[n]{\varrho}, \quad n\omega' = \omega + 2k\pi,$$

tak že hledané číslo z' může býti jen tvaru

$$z' = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\omega + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\omega + 2k\pi}{n}\right).$$

Povýšením této hodnoty na mocnost n obdržíme $\varrho(\cos \omega + i \sin \omega)$, t. j. z' hoví kladeným požadavkům.

Ve výrazu nalezeném podávají čísla $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ všecky hodnoty z', jichž n-tá mocnost jest z; tím však nabudeme jen n různých hodnot po z', neboť kladouce za k dvě čísla různící se o n, máme touž hodnotu z', tak že stačí položiti za k čísla $0, 1, 2, \ldots n - 1$, aneb vůbec n čísel po sobě jdoucích, a obecněji n čísel neshodných mod. n. Hodnoty v počtu n ply-

noucí po ε' při $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$ jsou veskrze různé, je-li $\varrho > 0$; neboť rovnost dvou, odpovídajících číslům k, k' by vymáhala rovnosti

$$\cos\frac{\omega + 2k\pi}{n} = \cos\frac{\omega + 2k'\pi}{n},$$

$$\sin\frac{\omega + 2k\pi}{n} = \sin\frac{\omega + 2k'\pi}{n},$$

a tedy by rozdíl úhlů $\frac{2(k-k')\pi}{n}$ musil býti celistvým násobkem plného úhlu 2π, t. j. $\frac{k-k'}{n}$ číslem celistvým, což vzhledem ku $k < n$, $k' < n$ není možné. Tím nalézáme, ***že n-tá odmocnina z každého komplexního čísla*** $\varrho(\cos\omega + i\sin\omega)$ ***různého od*** 0 ***má n hodnot, daných výrazem***

$$\sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\omega\ 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\omega + 2k\pi}{n}\right),\ (k = 0, 1, 2, \ldots n-1).$$

Jde-li n. p. o třetí odmocninu $z - 1$, položme tuto hodnotu nejprve do normálného tvaru $1(\cos\pi + i\sin\pi)$, načež

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3},\ (k = 0, 1, 2),$$

čímž nabýváme tří hodnot:

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1,\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pro třetí odmocninu $z\ 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$ nalézáme

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3},\ (k = 0, 1, 2),$$

t. j. hodnoty

$$1,\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kapitola II.

Limity a meze. Nekonečné řady a součiny.

18. Rozšířený pojem limity.

Dána-li nekonečná řada reálných čísel

(1) $$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots$$

a existuje-li číslo a takové, že rozdíl $a_n - a$ se stává číselně libovolně malým pro dosti velké n, t. j. platí-li

$$| a_n - a | < \varepsilon, \quad \text{jakmile } n > p,$$

kde ε jest libovolně malé kladné číslo a p jisté kladné číslo celistvé, tu pravíme (čl. 12.), že a_n má limitu a pro n rostoucí do nekonečna, aneb že a_n konverguje k a pro $n = \infty$, a píšeme

$$\lim_{n=\infty} a_n = a.$$

Dle článku 13. jest konvergence posloupnosti čili *nerovnost*

$$| a_{n+\nu} - a_n | < \varepsilon, \quad n > p,$$

při libovolném ν, nutná a postačující výminka pro to, aby existoval konečný lim a_n pro $n = \infty$ *).

Rostou-li však členy dané posloupnosti (1) nad každé číslo, t. j. platí-li

$$a_n > E, \quad \text{jakmile } n > p,$$

*) *Cauchy*, Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique, 1ère Partie, Analyse algébrique, 1821, Chap. VI. K této výmince poukázal již *Bolzano* v pojednání „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege", Abh. der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, Prag, 1817, jehož překlad prof. Studnička uveřejnil v Časop. pro pěst. math. a fysiky, roč. XI.

kde E značí libovolně velké kladné číslo a p jisté celistvé číslo, na onom obecně závislé, tu pravíme, že a_n roste do nekonečna č. že má limitu ∞, roste-li n do nekonečna, a píšeme

$$\lim_{n = \infty} a_n = \infty ;$$

a dále pravíme, že a_n klesá do $-\infty$ píšíce

$$\lim_{n = \infty} a_n = -\infty ,$$

roste-li $-a_n$ do ∞, což tedy vyžaduje, aby $a_n < -E$, jakmile $n > p$.

Mlčky ve všech těchto případech předpokládáme, že n roste do nekonečna tím způsobem, že nabývá celistvých kladných hodnot.

Stanovení limit se mnohdy usnadní následujícími výroky, jichž správnost dle čl. 10. a 11. jest patrna:

Jest-li $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, jest $\lim (a_n + b_n) = a + b$,

t. j. $$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n ,$$

a podobně v případě více sčítanců; obdobně

$$\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n ,$$
$$\lim (a_n b_n) = \lim a_n . \lim b_n ,$$
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} ,$$

tato poslední rovnost ovšem za supposice $\lim b_n \gtrless 0$. Ostatně plynou tato pravidla pro stanovení limity součtu, rozdílu atd. přímo z definice limity; dle této jsou rozdíly $a_n - a$, $b_n - b$ číselně libovolně malé pro dosti velké n, tedy

$$a_n = a + \alpha , \quad b_n = b + \beta ,$$

kde α, β se stávají číselně libovolně malými. Nyní ale rovnice

$$a_n + b_n - (a + b) = \alpha + \beta$$

ukazuje, že $a + b$ jest $\lim (a_n + b_n)$, a rovnice

$$a_n b_n - ab = a\beta + b\alpha + \alpha\beta$$

ukazuje, že levá strana se stává libovolně malou, t. j. že

$$ab = \lim (a_n b_n), \text{ atd.}$$

Ve speciálném případě, kdy $\lim a_n = 0$, pravíme, že a_n jest nekonečně malé číslo pro $n = \infty$; to tedy znamená, že $| a_n - 0 |$, t. j. $| a_n |$ se stává libovolně malým pro dosti velké n. V úvaze právě předcházející jsou α a β nekonečně malá čísla.

N. p. při posloupnosti $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ jest $a_n = \frac{1}{n}$, $\lim a_n = 0$ č. $\frac{1}{n}$ jest nekonečně malé číslo pro $\lim n = \infty$; skutečně

$$a_n - 0 = \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ jakmile } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Při posloupnosti $2 - \frac{1}{1^2}, \; 2 - \frac{1}{2^2}, \; 2 - \frac{1}{3^2}, \ldots$ jest $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, $\lim a_n = 2$; skutečně $| a_n - 2 | = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$, jakmile $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Hodnoty $1, \; 1 + \alpha, \; \frac{1}{2}, \; \frac{1}{2} + \alpha, \; \frac{1}{3}, \; \frac{1}{3} + \alpha, \ldots$ nemají limity, neboť při dosti velkém n se liší a_n libovolně málo střídavě od 0 a od α, tak že nemůže existovati číslo a, od něhož by se a_n stále lišilo libovolně málo, jakmile $n > p$.

Vyšetřme ještě posloupnost $c, \; c^2, \; c^3, \ldots$ v příčině limity její. Budiž nejprve $c \geqq 2$; pak $a_n = c^n \geqq 2^n$ a tedy a_n větší než libovolně velké kladné číslo E, jakmile $n > \frac{\log E}{\log a}$; jest tedy $\lim_{n = \infty} c^n = \infty$.

Budiž, za druhé, $1 < c < 2$; vzhledem k $c > 1$ pak

$$\frac{c^n - 1}{c - 1} = c^{n-1} + c^{n-2} + \ldots + c + 1 > n,$$

$c^n - 1 > n(c - 1)$, $c^n > 1 + n(c - 1) > E$ při $n > \frac{E - 1}{c - 1}$, tedy

$$\lim c^n = \infty \text{ při } n = \infty.$$

Budiž dále $c = 1$; pak jest $1, \; 1, \; 1, \ldots$ daná posloupnost a $\lim_{n = \infty} c^n = 1$.

Budiž dále $0 < c < 1$, tedy $\frac{1}{c} > 1$, $\frac{1}{c^n} > 1 + n\left(\frac{1}{c} - 1\right)$, z čehož $c^n < \varepsilon$, jakmile $n > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{c} - 1}$, a tedy $\lim_{n = \infty} c^n = 0$. Máme tedy $\lim_{n = \infty} c^n = \infty$ při $c > 1$, $\lim_{n = \infty} c^n = 0$ při $0 < c < 1$.

Jest-li c záporné a < -1, rostou hodnoty c, c^2, c^3, . . číselně nad každé číslo a mají střídavá znamení; $\lim_{n=\infty} c^n$ tedy neexistuje. Jest-li ale $-1 < c < 0$, klesají hodnoty c, c^2, c^3, . . číselně pod každé kladné číslo a tedy $\lim_{n=\infty} c^n = 0$.

19. Pojem horní a dolní meze.

Každá nekonečná posloupnost konečných hodnot, ať konvergující neb nekonvergující, má horní a dolní mez, t. j. existuje určité číslo L, nad které není žádný člen dané posloupnosti a_1, a_2, a_3, . . a takové, že se buď vyskytují členy rovné L, aneb členy odchylující se od L o libovolně málo, v kterémž případě L není členem posloupnosti, a dále existuje číslo l, jehož není menším žádný člen posloupnosti a takové, že buď se vyskytnou členy rovné l, aneb členy různící se od l o libovolně málo. Číslo L sluje *horní*, číslo l *dolní mezí* čísel a_1, a_2, a_3, . .*).

Supposice o konečnosti členů dané posloupnosti opět znamená, že každý jest číselně menší než určité číslo A.

Utvořme novou posloupnost a_1, a_m, a_n, . . následujícím způsobem. Číslo a_m budiž v řadě čísel a_2, a_3, . . první, které jest větší než a_1; není-li žádné větší, jest a_1 horní mezí všech hodnot a_ν, jinak budiž a_n první číslo větší než a_m v řadě a_{m+1}, a_{m+2}, . .; kdyby takového čísla vůbec nebylo, bylo by číslo a_m horní mezí, atd. Tím buďto nalezneme člen posloupnosti, jenž sám jest horní mezí, aneb novou nekonečnou posloupnost a_1, a_m, a_n, . . o konečných rostoucích členech, tedy konvergující a stanovící jisté číslo L té vlastnosti, že $L - a_p$ jest číselně libovolně malé pro dosti velké p (čl. 13.).

Důkaz o existenci dolní meze l by se vedl obdobně.

N. p. čísla

$$1 - \frac{1}{2},\quad -1 + \frac{1}{3},\ 1 - \frac{1}{4},\ -1 + \frac{1}{5},\ . .$$

$$1 - \frac{1}{2\nu},\ -1 + \frac{1}{2\nu+1},\ . .$$

jež číselně jsou všecka menší než 1, mají horní mez 1 a dolní mez -1; ani této ani oné meze nedosáhne žádné z daných čísel.

*) Pojem ten vytkl již *Bolzano*, l. c., později *Weierstrass* ve svých přednáškách.

20. Posloupnost o členech komplexních.

O nekonečné posloupnosti komplexních čísel

(2) $$\alpha_1 + i\beta_1,\ \alpha_2 + i\beta_2,\ \alpha_3 + i\beta_3,\ \ldots$$

pravíme, že konverguje a stanoví číslo $\alpha + i\beta$ píšíce

$$\lim_{n=\infty} (\alpha_n + i\beta_n) = \alpha + i\beta,$$

jestliže

$$| \alpha_n + i\beta_n - (\alpha + i\beta) | < \varepsilon \text{ při } n > p,$$

kde ε značí jako dosud libovolně malé kladné číslo, a p jisté kladné číslo, závislé obecně na ε. Poněvadž absolutní obnos

$$| \alpha_n + i\beta_n - (\alpha + i\beta) | = \sqrt{(\alpha_n - \alpha)^2 + (\beta_n - \beta)^2}$$

se stává libovolně malým jen tenkráte, kdy rozdíly $\alpha_n - \alpha$, $\beta_n - \beta$ jsou číselně libovolně malé, soudíme, že posloupnost (2) konverguje tenkráte a jen tenkráte, kdy konvergují obě posloupnosti

(3) $$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \text{ a } \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots;$$

stanoví-li tyto resp. čísla α, β, jest pak $\alpha + i\beta$ číslo stanovené posloupností (2).

Z toho ihned vychází, že nutná a postačující výminka, aby posloupnost (2) měla konečnou limitu, jest, aby při libovolném ν

$$| \alpha_{n+\nu} + i\beta_{n+\nu} - (\alpha_n + i\beta_n) | < \varepsilon, \text{ jakmile } n > p;$$

neboť pak a jen pak se stávají rozdíly $\alpha_{n+\nu} - \alpha_n$, $\beta_{n+\nu} - \beta_n$ při dosti velkých n číselně libovolně malými, t. j. posloupnosti (3) jsou konvergentními.

Také o posloupnostech s komplexními členy patrně platí

$$\lim (u_n \pm v_n) = \lim u_n \pm \lim v_n, \text{ atd.}$$

21. Konvergence nekonečných řad.

Nekonečnou řadou č. stručněji řadou nazýváme posloupnost nekonečného množství čísel u_0, u_1, u_2, . . dle jistého zákona utvořených a addicí spojených. Hodnoty u slují členy její, u_n členem obecným; týž jest závislý určitým způsobem na indexu n.

Nekonečnou řadu o reálných členech

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{4}$$

nazýváme konvergentní č. sbíhavou, je-li posloupnost

$$s_1 = u_0,\ s_2 = u_0 + u_1,\ s_3 = u_0 + u_1 + u_2,\ \ldots \tag{5}$$

konvergující, a pak nazýváme číslo s, touto posloupností stanovené, součtem nekonečné řady (4), tedy

$$s = \lim_{n=\infty} s_n;$$

není-li posloupnost (5) konvergující, t. j. neexistuje-li lim s_n aneb je-li lim $s_n = \pm \infty$, nazýváme řadu (4) divergentní č. rozbíhavou, a nepřipisujeme jí žádného součtu.

Jest tedy nutná a postačující výminka pro konvergenci řady (4), *aby platila pro každé* ν *nerovnost*

$$| s_{n+\nu} - s_n | < \varepsilon, \quad n > p,$$

kde ε značí libovolně malé kladné číslo, a p celistvé číslo obecně na ε závislé, t. j. *aby platila neřovnost*

$$| u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+\nu-1} | < \varepsilon,\ n > p. \tag{6}$$

Učinivše $\nu = 1$, jest $s_{n+\nu} - s_n = u_n$, a tedy $| u_n | < \varepsilon$ při dosti velkém n, t. j. *v každé konvergující řadě jest* $\lim_{n=\infty} u_n = 0$, č. jinak řečeno, členy každé konvergující řady se stávají nekonečně malými. Toť ovšem nutné, ale nestačí pro konvergenci, jakož snadno vychází n. p. u řady harmonické

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Zde patrně máme $s_1 < s_2 < s_3 \ldots$, a dále snadno nahlédneme, že s_n roste nad každé číslo s rostoucím n; stačí členy v s_n shrnouti takto do skupin

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots,$$

aby bylo zjevno, že skupina v první závorce jest větší než $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ t. j. $\frac{1}{2}$, skupina v druhé závorce opět větší než $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

$+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ t. j. $\frac{1}{2}$, a t. d., že tedy pro dosti velké n jest s_n větší než libovolně velký násobek zlomku $\frac{1}{2}$, t. j. s_n libovolně velké, čili $\lim_{n=\infty} s_n = \infty$, a řada divergující.

Přímé vyčíslení $\lim s_n$ se snadno provede u řady

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots;$$

$$\text{zde } s_1 = 2-1,\quad s_2 = 2-\frac{1}{2},\quad s_3 = 2-\frac{1}{4},\ldots,$$

$$s_n = 2-\frac{1}{2^{n-1}},$$

a tedy $\lim_{n=\infty} s_n = 2$, pročež řada konverguje majíc součet 2.

Případy, v nichž možno s_n vyjádřiti tvarem přehledným, jenž dovoluje vyčíslení aneb alespoň odhadnutí $\lim s_n$, jsou poměrně řídké, a nutno vzíti útočiště k jiným pomůckám, jde-li o posouzení konvergence řady. Nejhlavnější z nich nyní vyložíme*).

22. **Rozhodování o konvergenci, zbytek řady, konvergence absolutní.**

Řada o kladných členech

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{4}$$

konverguje, jsou-li všecky součty $s_1, s_2, \ldots$ menší než určité číslo A; pak jest totiž rostoucí posloupnost $s_1, s_2, s_3, \ldots$ konvergentní (čl. 13.) a číslo s, jí stanovené, jest součtem řady (4).

Nahradíme-li v konvergující řadě libovolný konečný počet členů jinými hodnotami, jest nová řada opět konvergující, neboť na nerovnost (6), zabezpečující konvergenci, nemají počátečné členy $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ žádného vlivu. Z toho patrno, že při posuzování konvergence netřeba přihlížeti k počátečným členům

*) Podrobnějšího poučení o konvergenci řad nalezne čtenář ve stati: *A. Pringsheim*, Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern, Math. Ann. t. XXXV, kde oceněna a navzájem porovnána konvergenční kriteria.

v libovolném počtu, okolnost důležitá tenkráte, kdy počátečné členy jsou tvořeny nepravidelným nějakým způsobem.

Dána-li konvergentní řada o kladných členech, vzniká vynecháním konečného neb nekonečně velkého počtu členů nová řada, též konvergující; nerovnost (6) jest totiž také pro novou řadu patrně vyplněna. Totéž platí o nové řadě, již obdržíme, nahradíme-li konečný neb nekonečný počet členů menšími kladnými čísly neb 0.

Konverguje-li řada o reálných členech (4) mající součet s, konverguje také řada

$$u_\mu + u_{\mu+1} + u_{\mu+2} + \ldots ; \tag{7}$$

a nazveme-li její součet R_μ, platí

$$s = s_\mu + R_\mu .$$

Hodnota R_μ sluje *zbytkem* řady (4), sečteme-li jen μ jejích prvních členů.

Skutečně máme

$$s_n = s_\mu + u_\mu + u_{\mu+1} + \ldots + u_{n-1} ,$$

tedy $$u_\mu + u_{\mu+1} + \ldots + u_{n-1} = s_n - s_\mu ,$$

a $$\lim_{n=\infty} (u_\mu + u_{\mu+1} + \ldots + u_{n-1}) = \lim s_n - s_\mu = s - s_\mu ,$$

t. j. řada (7) konverguje a má součet $s - s_\mu$, jak bylo dokázati.

Konverguje-li řada číselných hodnot

$$| u_1 | + | u_2 | + | u_3 | + \ldots , \tag{8}$$

tedy konverguje také řada (4), a pak pravíme, že *konverguje absolutně**). Z konvergence řady (8) totiž soudíme, že

$$| u_n | + | u_{n+1} | + \ldots + | u_{n+\nu} | < \varepsilon \text{ při } n > p ;$$

avšak (čl. 16.)

$$| u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+\nu} | \leqq | u_n | + | u_{n+1} | + \ldots + | u_{n+\nu} | ,$$

tedy

$$| u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+\nu} | < \varepsilon \text{ při } n > p ,$$

jak bylo dokázati.

---

*) *Cauchy*, Cours d'Analyse, Chap. VI, § III.

N. p. řada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots$ konverguje, poněvadž jsme o řadě číselných hodnot

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

ukázali (čl. 21.), že konverguje.

Ovšem nevymáhá konvergence řady (4) konvergenci řady (8), t. j. řada (4) může konvergovati, aniž by však konvergovala absolutně; n. p. řada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ konverguje — jakož ihned ukážeme — kdežto řadu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ jsme seznali (čl. 21.) jakožto divergující.

Jestliže členy nekonečné řady mají od jistého místa znamení střídavá a stále číselně klesají stávajíce se libovolně malými, tedy řada konverguje.

Dle učiněných supposic máme pro dosti velké n

$$\pm (u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+\nu}) = |u_n| - |u_{n+1}| + |u_{n+2}| - \ldots \pm |u_{n+\nu}|.$$

Pravou stranu možno napsati dvojím způsobem, a to

$$(|u_n| - |u_{n+1}|) + (|u_{n+2}| - |u_{n+3}|) + \ldots,$$

aneb

$$|u_n| - (|u_{n+1}| - |u_{n+2}|) - (|u_{n+3}| - |u_{n+4}|) - \ldots;$$

z prvního tvaru vzhledem k supposici

$$|u_n| > |u_{n+1}| > |u_{n+2}| > \ldots$$

patrno, že tato pravá strana jest kladná, a z druhého vychází, že jest menší než $|u_n|$. Máme tedy

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+\nu}| < |u_n|,$$

a poněvadž jest $|u_n|$ libovolně malé při dosti velkém n, soudíme, že daná řada $u_0 + u_1 + \ldots$ konverguje. Zároveň dovolují ony dva tvary posouditi velikost zbytku R_n; jest totiž

$$|R_n| < |u_n| \text{ a } |R_n| > |u_n| - |u_{n+1}|.$$

Nyní jest konvergence řady $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ patrna; a píšíce n. p.

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + R_4,$$

máme

$$R_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) - \ldots;$$

$$R_4 < \frac{1}{5},\ R_4 > \frac{1}{5} - \frac{1}{6}.$$

Rovněž patrna jest konvergence řady

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \ldots,$$

kde a, b značí dvě libovolná kladná čísla; řada ta ale nekonverguje absolutně, poněvadž řada

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \ldots$$

jest divergující. Platí totiž při $a < b$ pro součet s_n prvních n členů jejích

$$s_n > \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,a} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right),$$

a při $a > b$:

$$s_n > \frac{1}{b} + \frac{1}{2b} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,b} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right),$$

konečně při $a = b$,

$$s_n = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right),$$

z čehož patrno (čl. 21.), že s_n se stává větší než každé číslo pro dosti velké n. Závěru toho docházíme porovnáním řady s řadou harmonickou již prozkoumanou $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$; podobného porovnání užijeme ještě častěji k posouzení konvergence.

Jest-li

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{9}$$

absolutně konvergující řada o nekonečném množství jak kladných tak záporných členů, tu konverguje řada utvořená z jejích kladných členů, jakož i řada utvořená z číselných hodnot jejích záporných členů; značíme-li S', S'' součty těchto řad, platí

$$S = S' - S''.$$

Označme s_n součet prvních n členů dané řady, s'_n součet n' kladných členů a s''_n součet číselných hodnot n'' záporných členů v s_n obsažených; pak patrně

$$s_n = s'_n - s''_n, \quad s'_n < \Sigma, \quad s''_n < \Sigma, \tag{10}$$

značí-li Σ součet řady

$$| u_0 | + | u_1 | + | u_2 | + \ldots$$

Roste-li n do nekonečna, roste jak n' tak n'' do nekonečna, jinak by daná řada neobsahovala nekonečné množství kladných i záporných členů; a tedy vychází z druhé a třetí nerovnosti (10), že (čl. 13.)

$$\lim_{n' = \infty} s'_n = S', \quad \lim_{n'' = \infty} s''_n = S''$$

jsou konečné hodnoty, a pak máme z rovnosti (10)

$$\lim_{n = \infty} s_n = \lim s'_n - \lim s''_n = S' - S'',$$

jak bylo dokázati.

Kdyby absolutně konvergující řada (9) obsahovala jen konečný počet záporných členů, tedy by kladné její členy opět tvořily řadu konvergentní, a je-li S' její součet, tu by opět $S = S' - S''$, značí-li S'' součet číselných hodnot členů záporných; a pod. v případě, kdy (9) obsahuje konečný počet kladných členů, tedy nekonečné množství členů záporných.

23. **Přemístění členů řady konvergující.**

Přemístěním členů absolutně konvergující řady vzniká nová řada absolutně konvergující o témž součtu jako původní.

Mějmež nejprve konvergující řadu o kladných členech

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, \tag{11}$$

která nechť změnou pořadu členů přejde do řady

$$u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots \tag{12}$$

Z konvergence řady (11) soudíme, že

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+\nu} < \varepsilon \quad \text{při } n > p. \tag{13}$$

Volme nyní index m tak velký, aby součet

$$s'_m = u'_0 + u'_1 + \ldots + u'_{m-1}$$

obsahoval všecky členy součtu $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$, tedy $m \gtrless n$; pak se nadbytek součtu s'_m nad s_n skládá z členů vzatých z řady $u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \ldots$ a jest tedy dle (13) menší než ε:

$$s'_m - s_n < \varepsilon \quad \text{při } n > p,$$

jinak řečeno: $\lim_{n=\infty} (s'_m - s_n) = 0$ č. $\lim s'_m - \lim s_n = 0$,

t. j. $$\lim_{n=\infty} s'_m = \lim s_n = S,$$

čímž tvrzení dokázáno.

Je-li za druhé řada absolutně konvergující (11) o členech různě označených, a je-li (12) řada z ní vznikající přemístěním členů, volme opět $m \gtrless n$ tak velké, aby součet s'_m obsahoval s_n; pak $s'_m - s_n$ se skládá ze členů vzatých z řady

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots,$$

a vzhledem k nerovnosti, vyjadřující absolutní konvergenci řady (11)

$$| u_n | + | u_{n+1} | + \ldots + | u_{n+\nu} | < \varepsilon, \quad n > p,$$

soudíme opět, že

$$| s_m - s_n | < \varepsilon \quad \text{při } n > p,$$

t. j. $\lim_{n=\infty} (s'_m - s_n) = 0$ č. $\lim s'_m = \lim s_n$,

jak bylo dokázati.

U řad, které sice konvergují, avšak ne absolutně (bedingt convergent), tak že diverguje řada číselných hodnot členů, možno *konečný* počet členů přemístiti, a o vznikající řadě tvrditi, že opět konverguje, majíc týž součet jako původní. Při takovém přemístění zůstávají členy od jistého místa, n. p. od členu u_p, na svých místech, a jest tedy při $n > p$ součet prvních n členů v dané i odvozené řadě týž, tedy i $\lim_{n=\infty} s_n$ týž.

U řad takových má však přemístění nekonečného množství členů podstatný vliv na konvergenci a součet řady, *neboť lze* — jakož *Riemann**) ukázal — *členy neabsolutně konvergující řady vždy tak přemístiti, že vznikající řada má za součet jakékoli číslo* A. Především jest patrné, že řada taková obsahuje nekonečné množství jak kladných, tak záporných členů, a že členy kladné tvoří

*) Werke, pag. 221.

řadu divergující, a členy záporné též; jinak by totiž daná řada byla buď absolutně konvergentní aneb divergentní (čl. 22.). Je-li nyní A n. p. číslo kladné, tedy sečtěme nejprve tolik členů kladných, aby součet jich přesáhl A, věc možná, poněvadž řada kladných členů diverguje; k nim přičtěme tolik záporných, po sobě jdoucích členů, by celkový součet byl $< A$, k nim zase připojme tolik dalších kladných členů, by nový součet byl opět $> A$, atd.. neměníce jinak pořad členů.

Součet nové řady bude A; neboť vzhledem k $\lim u_n = 0$ stává se přesahování nad A a nedosahování k A libovolně malým.

Aby nekonečná řada konvergovala při jakémkoli sledu členů, majíc vždy týž součet, jest nutno a stačí, aby konvergovala absolutně. Jest to nutné, neb jinak lze, dle předchozí úvahy, jiným pořadem členů docíliti jakýkoli jiný součet, a stačí to dle první věty tohoto článku.

Řada n. p.

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \tag{13}$$

jest konvergentní, však neabsolutně, majíc divergující řadu absolutních hodnot. Přemístěním členů obdržíme řadu

$$\Sigma = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \ldots, \tag{14}$$

čili

$$\Sigma = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{5} - \ldots,$$

jež vzhledem k

$$1 > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{1}{3} > \frac{1}{6} + \frac{1}{8} > \ldots,$$

t. j. obecně

$$\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2 \cdot 2n} > \frac{1}{2n+1},$$

a vzhledem k okolnosti, že členům o střídavých znameních ubývá k 0, dle čl. 22. jest konvergentní. Součet Σ řady této se různí od součtu S řady původní, jakož ukazuje následující úvaha.

Položme

$$s'_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1},$$

$$s''_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n};$$

máme pak

$$\frac{1}{2}\left(s'_n - s''_n\right) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1).2} - \left(\frac{1}{2.2} + \frac{1}{4.2} + \ldots + \frac{1}{2n.2}\right),$$

a přičteme-li a odečteme-li součet

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2},$$

máme

$$\frac{1}{2}\left(s'_n - s''_n\right) = \frac{2}{1.2} + \frac{2}{3.2} + \ldots + \frac{2}{(2n-1)2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n.2}\right),$$

(15)
$$\frac{1}{2}\left(s'_n - s''_n\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n.2}\right).$$

Rozdíl $s'_n - s''_n$ jest patrně součtem s_{2n} prvních $2n$ členů řady (13) a tedy

$$S = \lim\,(s'_n - s''_n), \quad n = \infty,$$

kdežto pravá strana rovnice (15) ukazuje, že $\frac{1}{2}\left(s'_n - s''_n\right)$ jest součtem prvních $4n - 1$ členů řady (14), tak že

$$\Sigma = \lim \frac{1}{2}\left(s'_n - s''_n\right) = \frac{1}{2} \lim \left(s'_n - s''_n\right), \quad n = \infty,$$

z čehož

$$\Sigma = \tfrac{1}{2} S.$$

24. Porovnávání řad; řada geometrická.

Výdatnou pomůckou při posuzování kovergence bývá porovnání dané řady s jinou, v příčině konvergence již prozkoumanou

Budiž

(U) $$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

daná řada o kladných členech; porovnejme ji s jinou řadou o kladných členech

(V) $$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots$$

Jest-li řada (V) konvergující a nepřesahují-li členy řady (U) příslušné členy řady (V), jest (U) patrně také konvergentní; je-li řada (V) divergentní, a jsou-li členy řady (U) větší než příslušné členy řady (V), jest (U) také divergentní.

Dána-li řada o kladných členech (U), tu byla nutná, ale ne postačující výminka pro její konvergenci, aby $\lim_{n=\infty} u_n = 0$; lze ukázati, *že i* $\lim nu_n$, *jestliže existuje, musí býti* 0, *aby řada mohla konvergovati*, ale i tato výminka není ovšem postačující ku konvergenci. Skutečně, součin nu_n jsa kladným a maje dle supposice limitu pro $n = \infty$, může míti za limitu jen 0 neb číslo kladné k, aneb může růsti nad každé číslo. V druhém případě pro dosti velké n platí

$$| nu_n - k | < \alpha ,$$

kde α značí libovolně malé číslo kladné, dejme tomu, menší než k. Rozdíl $nu_n - k$ jest tedy obsažen mezi $-\alpha$ a $+\alpha$, tudíž nu_n mezi $k - \alpha$ a $k + \alpha$, pročež $nu_n > k - \alpha$, a $u_n > \frac{k - \alpha}{n}$, t. j. členy dané řady jsou od jistého n větší než resp. členy řady divergentní

$$\frac{h}{n} + \frac{h}{n+1} + \frac{h}{n+2} + \ldots, \quad h = k - \alpha ,$$

a řada (U) tedy diverguje.

V třetím případě jest pro dosti velký index $nu_n > A$, kde A značí libovolné kladné číslo, a tedy $u_n > \frac{A}{n}$, tudíž řada (U) divergentní. Má-li tedy řada (U) konvergovati, musí nastati případ první, t. j. musí $\lim nu_n = 0$ pro $n = \infty$; ovšem není tato výminka postačující, jakož n. p. vychází u řady

$$1 + \frac{1}{2\, l2} + \frac{1}{3\, l3} + \ldots + \frac{1}{n\, ln} + \ldots ,$$

kde ln značí logarithmus čísla n. Řada ta diverguje (čl. 28.), ač

$$\lim nu_n = \lim \frac{1}{ln} = 0 \quad \text{pro } n = \infty.$$

Jakožto applikaci vytkněme řadu již v čl. 22. uvažovanou

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \ldots + \frac{1}{a+nb} + \ldots,$$

kde a, b značí dvě libovolná kladná čísla; zde

$$\lim nu_n = \lim \frac{n}{a+nb} = \lim \frac{1}{\frac{a}{n}+b} = \frac{1}{b}$$

jest různý od 0, a řada tedy diverguje.

Pohodlně porovnáme řady (U) a (V), přihlédneme-li k podílu $\frac{u_n}{v_n}$ příslušných jich členů; je-li tento podíl, alespoň od jistého indexu n, obsažen mezi dvěma kladnými čísly a, b, různými od nully, jest řada (U) konvergentní, je-li (V) konvergentní, a (U) jest divergentní, je-li (V) divergentní, neboť u_n jest mezi av_n a bv_n a tedy jsou členy řady (U) mezi příslušnými členy řad

$$av_0 + av_1 + av_2 + \ldots,$$
$$bv_0 + bv_1 + bv_2 + \ldots,$$

konvergentních, je-li (V) konvergentní, a divergentních, je-li (V) divergentní.

Obdobně vychází, že v případě, kdy podíl $\frac{u_n}{v_n}$ jest menší než určité kladné číslo b, konvergence řady (V) má za následek konvergenci řady (U); a v případě $\frac{u_n}{v_n} > a > 0$, divergence řady (V) má za následek divergenci řady (U). V prvním případě jsou členy řady (U) resp. menší, než členy konvergentní řady

$$bv_0 + bv_1 + bv_2 + \ldots,$$

a v druhém jsou větší, než resp. členy divergující řady

$$av_0 + av_1 + av_2 + \ldots$$

Této pomůcky lze zvláště tenkráte užiti, má-li podíl $\frac{u_n}{v_n}$ limitu pro $n = \infty$; je-li tato limita l různá od nully, a jsou-li

a, b dvě kladná čísla různá od nully tak volená, aby $a < l < b$, tu od jistého n bude $\frac{u_n}{v_n}$ mezi a, b a možno applikovati předchozí pravidlo, je-li ale ona limita nulla, bude od jistého n podíl $\frac{u_n}{v_n}$ menší, než kterékoli kladné číslo b, a možno pak z konvergence řady (V) souditi na konvergenci řady (U).

Chtíce těchto jednoduchých sice, však často výhodných pomůcek užiti, musíme především prozkoumati nějakou řadu (V) v příčině její konvergence; učiníme to s dvěma i jinak důležitými řadami.

Mějme nejprve řadu geometrickou

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots;$$

zde

$$s_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$= \frac{a}{q-1}\,q^n - \frac{a}{q-1},$$

a tedy

$$\lim_{n=\infty} s_n = \frac{a}{q-1}\lim q^n - \frac{a}{q-1}.$$

Při $|q| < 1$ jest (čl. 18.) $\lim q^n = 0$, a pak

$$\lim s_n = \frac{a}{1-q},$$

t. j. *řada geometrická, jejíž podíl jest číselně menší jednotky, konverguje a má součet* $\frac{a}{1-q}$.

Při $|q| > 1$, jest $\lim |q^n| = \infty$, a tedy geometrická řada o podílu číselně větším jednotky diverguje; to ostatně vychází již z toho, že členům řady číselně přibývá.

Konečně při $|q| = 1$, tedy $q = \pm 1$, máme řady

$$a + a + a + \ldots, \quad a - a + a - a + \ldots$$

patrně divergentní, jelikož jich členy se nestávají nekonečně malými.

N. p. řada

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

konverguje a má součet $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$;

řada

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$$

konverguje a má součet $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$;

řada

$$2-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}+\ldots$$

konverguje a má součet $\frac{2}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$.

25. **Pokračování.**

Na druhém místě vyšetřme řadu

$$\frac{1}{1^a}+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\ldots; \tag{16}$$

řada ta konverguje při $a>1$, *a diverguje při* $a\leqq 1$.

Mějme nejprve $a>1$. Shrneme-li členy posloupně po 1, 2, 4, . ., 2^μ, atd., můžeme řadu (16) psáti

$$\frac{1}{1^a}+\left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}\right)+\left(\frac{1}{4^a}+\ldots+\frac{1}{7^a}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{(2^\mu)^a}+\frac{1}{(2^\mu+1)^a}+\ldots+\frac{1}{(2^{\mu+1}-1)^a}\right)+\ldots$$

V každé skupině stojí největší člen na prvním místě, pročež první skupina jest menší než $2\,.\,\frac{1}{2^a}$, druhá menší než

$$4\,.\,\frac{1}{4^a},\ \ldots,$$

obecná menší $2^\mu\,.\,\frac{1}{(2^\mu)^a}$, atd., a tudíž, nechť jest n jakkoli velké,

$$\frac{1}{1^a}+\frac{1}{2^a}+\ldots+\frac{1}{n^a}<1+\frac{1}{2^{a-1}}+\frac{1}{2^{2(a-1)}}+\ldots$$
$$+\frac{1}{2^{\mu(a-1)}}+\ldots$$

Na pravé straně jest řada geometrická o podílu $\frac{1}{2^{a-1}} < 1$, tedy konvergující, mající součet $A = \frac{1}{2^{a-1}-1}$; součet prvních n členů řady (16) jest tedy vždy $< A$, a tedy (16) řadou konvergující (čl. 22.).

Máme-li za druhé $a = 1$, jest (16) prozkoumanou již řadou harmonickou (čl. 21.), a diverguje.

Máme-li konečně $a < 1$, jsou členy řady (16) patrně větší než korrespondující členy divergující řady harmonické

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots,$$

a tedy (16) divergentní.

Jakožto applikaci uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots; \tag{17}$$

členy její od druhého jsou menší než resp. členy konvergující řady geometrické

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots,$$

a tedy řada (17) konverguje. Součet této řady se značí literou e a béře se za základ t. z. přirozených č. Neperových logarithmů.

Píšeme-li

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{\underline{|n-1}} + R_n,$$

značíce $\underline{|n}$ součin $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, jest

$$R_n = \frac{1}{\underline{|n}}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right)$$

$$< \frac{1}{\underline{|n}}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right),$$

t. j.

$$R_n < \frac{1}{\underline{|n}} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}, \quad R_n < \frac{n+1}{n \cdot 1 \cdot 2 \ldots n},$$

čímž posouzena chyba, již se dopustíme, vezmeme-li v řadě pro e jen jistý počet členů. Tím snadno nalezneme, že

$$e = 2{\cdot}71828\ 18284\ \ldots$$

Uvažujme dále řadu

$$\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdot \cdot, \tag{18}$$

kde $f(x)$ značí polynom

$$f(x) = \alpha_0 x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \cdot \cdot + \alpha_\mu, \quad \mu > 1,$$

o němž předpokládáme, že nemá celistvý kladný kořen, t. j. že hodnoty $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ . . jsou různy od nully. Podíl n-ho členu řady (18) a n-ho členu řady pomocné (16), v níž supponujeme $a = \mu$ a která tedy konverguje, jest

$$\frac{n^\mu}{\alpha_0 n^\mu + \alpha_1 n^{\mu-1} + \cdot \cdot + \alpha_\mu} = \frac{1}{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdot \cdot + \frac{\alpha_\mu}{n^\mu}},$$

a jeho limita pro $n = \infty$ jest tedy $\frac{1}{\alpha_0}$; z toho patrno, že při $\alpha_0 > 0$ členy řady (18) jsou od jistého místa kladné, a že řada (18) konverguje absolutně. Při $\alpha_0 < 0$ jsou členy řady (18) od jistého místa vesměs záporné, a řada konverguje opět absolutně; stačí, změniti jich znamení, aby případ ten přešel do předchozího.

26. **Kriteria Cauchy-ova.**

Dána-li řada

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdot \cdot, \tag{19}$$

a je-li podíl sousedních členů $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *od jistého indexu p číselně stále menší než nějaká hodnota k, jež sama jest menší jednotky, tu řada konverguje absolutně, a je-li onen podíl číselně větší než nějaká hodnota k, jež sama jest větší jednotky, tu ona řada diverguje.*

Máme totiž v prvním případě

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < k < 1, \quad n = p, \quad p+1, \quad p+2, \cdot \cdot$$

t. j.

$$|u_{p+1}| < k\,|u_p|, \quad |u_{p+2}| < k\,|u_{p+1}| < k^2\,|u_p|,$$
$$|u_{p+3}| < k\,|u_{p+2}| < k^3\,|u_p|, \cdot \cdot,$$

a jsou tedy členy řady

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdot \cdot \tag{20}$$

od p-ho menší než korrespondující členy řady

$$|u_0| + |u_1| + \ldots + |u_{p-1}| + |u_p| + k|u_p| + k^2|u_p| + \ldots,$$

která konverguje vzhledem ku $k < 1$ a má součet

$$|u_0| + |u_1| + \ldots + |u_{p-1}| + \frac{|u_p|}{1-k}.$$

Zároveň patrno, že pro číselný obnos zbytku

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \ldots$$

při $n \gtrless p$ platí

$$|R_n| < \frac{|u_n|}{1-k}.$$

V druhém případě jest

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > k > 1, \quad n = p, \quad p+1, \ldots,$$

tedy $|u_{n+1}| > |u_n|$, členům tedy číselně přibývá, a řada (19) tudíž diverguje.

N. p. řada

$$a + aq + aqr + aq^2r + aq^2r^2 + aq^3r^2 + \ldots,$$

při $|q| < 1$, $|r| < 1$ konverguje absolutně; neboť podíl $|u_{n+1}| : |u_n|$ jest střídavě $|q|$ a $|r|$ a tedy stále $< k$, značí-li k hodnotu zvolenou mezi větší z hodnot $|q|$, $|r|$ a mezi 1.

Jest-li $\sqrt[n]{|u_n|}$ *od jistého indexu p stále menší než nějaká hodnota k, jež sama jest menší jednotky, tu řada (19) konverguje a s. absolutně; je-li ona odmocnina větší než nějaká hodnota k, jež sama jest větší jednotky, tu řada (19) diverguje.*

V prvním případě máme

$$|u_p| < k^p, \quad |u_{p+1}| < k^{p+1}, \quad |u_{p+2}| < k^{p+2}, \ldots,$$

a jsou tedy členy řady (20) od členu $|u_p|$ menší než korrespondující členy konvergující řady geometrické

$$k^p + k^{p+1} + k^{p+2} + \ldots, \quad k < 1,$$

pročež řada (20) konverguje.

V druhém případě roste k^n s n nad každé číslo, tedy roste i $|u_n| > k^n$ nad každé číslo, pročež (20) i (19) divergují.

Vět těch se výhodně užívá v případě, kdy podíl

$$|u_{n+1}| : |u_n|$$

neb odmocnina $\sqrt[n]{|u_n|}$ má limitu pro $n = \infty$. Je-li tato limita l menší než 1, jest řada (19) absolutně konvergentní, neboť onen podíl, resp. ona odmocnina, pro dosti velké n jest menší než každé číslo k, obsažené mezi l a 1. Jest-li však ona limita l větší než jedna, jest pro dosti velké n onen podíl, resp. ona odmocnina, větší než každé k, volené mezi 1 a l. Případ konečně, kdy ona limita jest 1, se vyskytuje jak u konvergentních, tak u divergentních řad, a tedy kriterium v tom případě nerozhoduje.

Existuje-li limita l podílu $|u_{n+1}| : |u_n|$, a také limita l' odmocniny $\sqrt[n]{|u_n|}$, jsou obě limity stejné).* Applikujme obě kriteria na řadu

$$|u_0| + |u_1|x + |u_2|x^2 + |u_3|x^3 + \ldots, \quad x > 0;$$

máme

$$\lim_{n=\infty} \frac{|u_{n+1}|x^{n+1}}{|u_n|x^n} = x \lim \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = lx,$$

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|u_n|x^n} = x \lim \sqrt[n]{|u_n|} = l'x.$$

Kdyby čísla l, l' byla různá, a kdybychom volili x mezi $\frac{1}{l}$ a $\frac{1}{l'}$, tu by jedno kriterium prokazovalo konvergenci, a druhé divergenci uvažované řady, neboť by z čísel lx a $l'x$ jedno bylo menší, a jedno větší než 1.

Ostatně lze přímo dokázati, že existence limity podílu $|u_{n+1}| : |u_n|$ má za následek existenci limity odmocniny $\sqrt[n]{|u_n|}$, ovšem stejné**).

N. p. u tak zvané řady exponenciálné

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

máme

$$u_n = \frac{x^n}{\underline{|n}}, \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|}{n+1}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 0;$$

řada tedy konverguje absolutně při každém x.

---

*) *J. Tannery*, Introd. à la Théorie des Fonctions d'une variable, pag. 81.

**) *Cauchy*, Cours d'Analyse de l'Ec. r. polytechnique, Chap. II, § III.

U řady binomické

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdot$$
$$+ \frac{m(m-1) \cdot \cdot (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot n} x^n + \cdot \cdot$$

jest

$$u_n = \frac{m(m-1) \cdot \cdot (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdot n} x^n,$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n}{n+1} x = \frac{\frac{m}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} x, \quad \lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = -x,$$

a tedy

$$\lim \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |x|;$$

při $|x| < 1$ tedy řada konverguje absolutně, a při $|x| > 1$ diverguje, vyjma případ, kdy m jest kladné celistvé číslo, a tedy řada konečná.

Při $|x| = 1$, t. j. $x = \pm 1$, vyšetříme tuto řadu později.

Mějme řadu

$$a_0 + \frac{x}{a_1} + \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{x^3}{a_3^3} + \cdot \cdot,$$

v níž $a_1, a_2, a_3, \cdot \cdot$ značí hodnoty různé od nully, jež číselně rostou s indexem nad každé číslo, t. j. $\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty$; zde

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \left| \frac{x}{a_n} \right|, \quad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 0,$$

a tedy řada konverguje a s. absolutně pro každé x.

Podobně konverguje absolutně řada

$$a_0 + \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} \frac{x}{a_2} + \cdot \cdot + \frac{1}{x - a_n} \frac{x^{n-1}}{a_n^{n-1}} + \cdot \cdot,$$

pro všecky hodnoty x, různé od hodnot $a_1, a_2, a_3 \cdot \cdot$*). Podíl korrespondujících členů řady předchozí a této jest číselně

$$\left| (x - a_n) \frac{x}{a_n} \right|;$$

hodnota ta pro $n = \infty$ má limitu $|x|$, a jest tedy také druhá řada absolutně konvergentní.

*) *Weierstrass*, Zur Theorie der analyt. Functionen, pag. 17, klade-li se $m_\nu = \nu - 1$; sr. *Tannery*, l. c. pag. 80.

Srovnáním řady (19) s řadou (16) nalezneme ihned tyto věty: Existuje-li číslo $a > 1$ takové, že od jistého n součin $n^a \mid u_n \mid$ jest stále menší než určitá hodnota A, tu řada (19) konverguje absolutně; členy řady $\mid u_n \mid + \mid u_{n+1} \mid + \ldots$ jsou totiž menší než resp. členy řady

$$\frac{A}{n^a} + \frac{A}{(n+1)^a} + \frac{A}{(n+2)^a} + \ldots,$$

která vzhledem k $a > 1$ konverguje.

Jsou-li členy řady (19) kladné, a platí-li od jistého n nerovnost $n^a u_n > A$, kde $a \leqq 1$, tu řada (19) diverguje; jsou totiž členy řady $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ větší než resp. členy divergující řady $\frac{A}{n^a} + \frac{A}{(n+1)^a} + \ldots$

Porovnání řady o kladných členech Σu_n s řadou o kladných členech Σv_n proveďme tak, že porovnáme podíl $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ s podílem $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Jestli od jistého místa $n = p$ stále platí

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

následuje z konvergence řady Σv též konvergence řady Σu; a platí-li

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

následuje z divergence řady Σv divergence řady Σu.

V prvním případě máme nerovnosti

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} < \frac{v_{p+1}}{v_p}, \quad \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} \cdot \frac{u_{p+1}}{u_p} < \frac{v_{p+2}}{v_{p+1}} \cdot \frac{v_{p+1}}{v_p}, \ldots,$$

t. j.

$$u_{p+1} < \frac{u_p}{v_p} v_{p+1}, \quad u_{p+2} < \frac{u_p}{v_p} u_{p+2}, \quad u_{p+3} < \frac{u_p}{v_p} v_{p+3}, \ldots,$$

tak že členy řady

$$u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \ldots$$

jsou resp. menší než korrespondující členy konvergující řady

$$a v_{p+1} + a v_{p+2} + a v_{p+3} + \ldots,$$

značíme-li literou a podíl $\frac{u_p}{v_p}$.

Obdobně se vede důkaz v případě druhém.

N. p. řada harmonická

$$\Sigma v = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots$$

diverguje; zde $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1}$, *čímž z nerovnosti* $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n}{n+1}$ t. j. $nu_n < (n+1)u_{n+1}$ *platné od jistého* n, *plyne divergence řady o kladných členech* Σu_n.

27. **Kriterium Raabe-ovo.**

Pan *Jensen* uveřejnil*) tuto větu velmi obecného rázu:

Řada o kladných členech Σu_n *konverguje, jestliže od jistého čísla* $n = p$ *platí*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > \mu,$$

kde a_n *jsou hodnoty kladné, a také* μ *číslo kladné.*

Máme vzhledem k napsané nerovnosti

$$u_{p+1} < \frac{1}{\mu}(a_p u_p - a_{p+1} u_{p+1}),$$

$$u_{p+2} < \frac{1}{\mu}(a_{p+1} u_{p+1} - a_{p+2} u_{p+2}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{p+m} < \frac{1}{\mu}(a_{p+m-1} u_{p+m-1} - a_{p+m} u_{p+m}),$$

a tedy

$$u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+m} < \frac{1}{\mu}\left(a_p u_p - a_{p+m} u_{p+m}\right) < \frac{1}{\mu} a_p u_p.$$

Z okolnosti, že součet na levé straně při libovolném m jest stále menší než číslo $\frac{1}{\mu} a_p u_p$, vychází konvergence řady Σu_n

*) Comptes Rendus de l'Ac. d. Sciences, t. CVI, p. 729. Věta jest velmi blízka následující, kterou *Kummer* již v XIII. svazku Crelle-ova žurnálu v pojednání „Ueber die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen" odvodil: „Značí-li A_n obecný člen řady, jejíž členy od jistého členu jsou vesměs kladny, a možno-li udati funkci m_k kladnou a takovou, že $m_k A_k = 0$ pro $k = \infty$. a že hodnota $f(k) = \frac{m_k A_k}{A_{k+1}} - m_{k+1}$ jest větší než 0 pro $k = \infty$, tu řada konverguje."

(čl. 22.), a zároveň patrno, že zbytek řady, následující po členu u_p, nemůže přesáhnouti ono číslo.

Položíme-li $a_n = 1$, obdržíme Cauchy-ovo kriterium konvergenční

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 > \mu, \quad \text{čili} \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \mu,$$

a zbytek řady Σu_n po členu u_p nastupující nepřesahuje $\frac{1}{\mu} u_p$.

Jest-li naopak platí od $n = p$ nerovnost

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1, \quad u_n < u_{n+1},$$

roste u_n s indexem n, a tedy řada Σu_n diverguje.

Položíme-li $a_n = n$, obdržíme kriterium *Raabe-ovo**), *dle něhož při platnosti nerovnosti*

$$n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) > \mu, \quad \text{čili} \quad u\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1 + \mu$$

řada o kladných členech Σu_n *konverguje*; zároveň patrno, že zbytek řady nastupující po členu u_n, nepřesáhne hodnotu $\frac{1}{\mu} n u_n$.

Jest-li naopak od jistého n stále

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1, \quad \textit{tedy} \quad n u_n < (n+1) u_{n+1},$$

diverguje řada (čl. 26.).

Má-li součin $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ *pro* $n = \infty$ *limitu* l, *tu při* $l > 1$

řada o kladných členech Σu_n *konverguje, a při* $l < 1$ *diverguje.* Značí-li totiž v prvním případě $1 + \mu$ nějaké číslo mezi 1 a l, musí od dosti velkého n platiti nerovnost

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1 + \mu$$

a řada tedy konverguje; značí-li v druhém případě $1 - \mu$ nějaké číslo mezi l a 1, musí od dosti velkého n platiti nerovnost

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1 - \mu,$$

---

*) *J. L. Raabe,* Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Reihen. Zeitschr. f. Physik u. Mathematik, herausg. v. A. Baumgartner u. A. v. Ettingshausen, t. X, Wien 1832.

a řada Σu_n tedy diverguje. Kriterium to mnohdy rozhodne, kdy $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ a kdy tedy kriterium podílové nerozhoduje.

Při řadě n. p.

$$1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots$$

máme

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n+1}{2n+3}$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n}} \cdot \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}}.$$

$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, tak že podílové kriterium nerozhoduje; avšak

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right) = \frac{n(6n+5)}{4n^2 + 4n + 1};$$

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{3}{2} > 1,$$

z čehož patrno, že řada konverguje.

28. **Kriteria Cauchy-Bertrandova.**

Cauchy odvodil, mimo kriteria již uvedená, také následující:

„Platí-li od $n = p$ nerovnost

$$\frac{l u_n^{-1}}{ln} > k,$$

kde *ln* značí logarithmus čísla *n*, a *k* hodnotu větší jednotky, jest řada o kladných členech Σu_n konvergentní; a platí-li

$$\frac{l u_n^{-1}}{ln} < k',$$

kde *k'* značí kladné číslo menší jednotky, jest řada divergentní.“

V prvním případě totiž máme

$$-l u_n > k \, ln, \quad l u_n < -ln^k, \quad u_n < \frac{1}{n^k},$$

a jsou tedy členy u_n menší než členy konvergující řady (16) v čl. 25.; obdobně vychází divergence v případě druhém.

Má-li podíl $\frac{lu_n^{-1}}{ln}$ limitu pro $n = \infty$, a je-li tato limita větší jednotky, lze patrně tvrditi, že řada o kladných členech Σu_n konverguje, a je-li menší jednotky, že diverguje*). V případě, kdy tato limita jest 1, není rozhodnuto; tu lze mnohdy s prospěchem užiti kriterií *Bertrandových***). První toto kriterium se odvodí srovnáním řady o kladných členech Σu_n s řadou

$$(20) \qquad 1 + \frac{1}{2(l2)^{1+\alpha}} + \frac{1}{3(l3)^{1+\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n(ln)^{1+\alpha}} + \ldots,$$

jejíž konvergence při $\alpha > 0$, a divergence při $\alpha \leqq 0$ snadno vychází. Učiňme ve větě Jensenově $a_n = n\,ln$, čímž vychází, že v případě, kdy

$$\frac{(n+1)[l(n+1)]^{1+\alpha}}{(ln)^{\alpha}} - (n+1)\,l(n+1),$$

t. j.

$$(n+1)\,l(n+1)\left[\left(\frac{l(n+1)}{ln}\right)^{\alpha} - 1\right]$$

od jistého n jest hodnota kladná, řada konverguje; to ale při $\alpha > 0$ patrně jest. Při $\alpha = 0$, máme řadu

$$1 + \frac{1}{2\,l2} + \frac{1}{3\,l3} + \ldots + \frac{1}{n\,ln} + \ldots,$$

jejíž divergence právě tak vychází, jako divergence řady harmonické (čl. 21.); píšeme-li ji

$$1 + \frac{1}{2\,l2} + \left(\frac{1}{3\,l3} + \frac{1}{4\,l4}\right) + \left(\frac{1}{5\,l5} + \ldots + \frac{1}{8\,l8}\right) + \left(\frac{1}{9\,l9} + \ldots + \frac{1}{16\,l16}\right) + \ldots,$$

jsou skupiny v závorkách patrně větší než resp. $\frac{2}{4\,l4}$, $\frac{4}{8\,l8}$, $\frac{8}{16\,l16}$ ... t. j. než $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\,l2}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\,l2}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\,l2}$ .., jež sečteny dávají řadu divergentní

$$\frac{1}{2\,l2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right).$$

---

*) *Cauchy,* Cours d'Analyse, chap. VI, théorème IV.

**) Règles sur la convergence des séries, Journal de Liouville, 1e série, t. VII. Kriteria ta, jakož auktor sám podotýká, se v podstatě shodují s pravidly, která odvodil již dříve *de Morgan* ve své učebnici počtu differenciálného a integrálného, Londýn, 1839.

Při $\alpha < 0$ konečně, jest $\frac{1}{n(ln)^{1+\alpha}} > \frac{1}{n\,ln}$, a tedy řada divergentní.

Nyní snadno vychází Bertrandovo kriterium: *Jest-li*

$$\lim_{n=\infty} \frac{l\,\frac{1}{n u_n}}{l\,ln}$$

větší než 1, *tu řada o kladných členech* Σu_n *konverguje, jest-li ona limita menší než* 1, *řada diverguje.* V prvním případu jest pro dosti velké n

$\frac{l\,\frac{1}{n u_n}}{l\,ln} > k > 1$, tedy $-ln - lu_n > k\,l\,ln$, čili $ln + ln_n < -k\,l\,ln$,

$$lu_n < l\,\frac{1}{n(ln)^k}, \quad u_n < \frac{1}{n(ln)^k}, \quad (k > 1),$$

a v druhém případě jest $u_n > \frac{1}{n(ln)^k}$, $(k < 1)$.

Jest-li ona limita rovna 1, užijme druhého kriteria Bertrandova, v němž rozhoduje limita podílu $l\,\frac{1}{nu\,ln} : lln$, a jež plyne porovnáním dané řady s řadou $\Sigma \frac{1}{nln(lln)^{1+\alpha}}$, jejíž konvergence při $\alpha > 0$ vychází, klademe-li $a_n = n\,ln\,.\,lln$, atd. *)

29. Řady o členech komplexních.

Nekonečná řada o komplexních členech

$$(\alpha_0 + i\beta_0) + (\alpha_1 + i\beta_1) + (\alpha_2 + i\beta_2) + \ldots \tag{21}$$

sluje konvergentní, je-li posloupnost

$$s_1 = \alpha_0 + i\beta_0, \quad s_2 = (\alpha_0 + i\beta_0) + (\alpha_1 + i\beta_1),$$
$$s_3 = (\alpha_0 + i\beta_0) + (\alpha_1 + i\beta_1) + (\alpha_2 + i\beta_2), \ldots$$

konvergentní, a číslo

$$s = \lim_{n=\infty} s_n = \alpha + i\beta$$

---

*) Konvergenci této, jakož i obecnější řady $\Sigma_{(n)} \frac{1}{n\,.\,ln\,.\,l^1n\,..\,(l^mn)^{1+\alpha}}$ při $\alpha > 0$ vytknul již *Abel*, Oeuvres, t. II, p. 200.

jí stanovené sluje součtem nekonečné řady; není-li tato posloupnost konvergentní, sluje řada divergentní a nemá součtu. Jest patrné, že v případu, kdy komplexní členy jsou vesměs reálnými, tato definice se shoduje s definicí konvergence řad reálných.

Dle čl. 20. pro konvergenci řady (21) jest nutné a stačí, aby

$$| s_{n+\nu} - s_n | < \varepsilon, \quad \text{při } n > p,$$

kde ε jest libovolné malé kladné číslo a p určité číslo celistvé; k tomu ale jest dle téhož čl. nutné a stačí, aby součty

$$\alpha_n + \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+\nu-1}, \quad \beta_n + \beta_{n+1} + \ldots + \beta_{n+\nu-1}$$

byly číselně libovolně malé při dosti velkém n, nechť jest ν jakékoliv, t. j. aby konvergovaly řady o reálných členech

$$(22) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots, \quad \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots$$

Značíce jich součty α, β, máme patrně pro součet řady (21)

$$s = \alpha + i\beta.$$

Učiníme-li v hořejší nerovnosti $\nu = 1$, vidíme, že také u komplexní konvergentní řady se $| u_n |$ stává libovolně malým pro dosti velké n, t. j., že $\lim_{n=\infty} u_n = 0$; ovšem tato nerovnost nestačí k zajištění konvergence.

Tím vyšetření konvergence řad komplexních převedeno na vyšetření konvergence řad reálných.

Konverguje-li řada absolutních hodnot

$$| \alpha_0 + i\beta_0 | + | \alpha_1 + i\beta_1 | + | \alpha_2 + i\beta_2 | + \ldots,$$

konverguje též řada (21) a s. pravíme, že konverguje *absolutně.* Dle supposice jest pak

$$| \alpha_n + i\beta_n | + | \alpha_{n+1} + i\beta_{n+1} | + \ldots + | \alpha_{n+\nu} + i\beta_{n+\nu} | < \varepsilon, \quad n > p;$$

avšak

$$| (\alpha_n + i\beta_n) | + \ldots + (\alpha_{n+\nu} + i\beta_{n+\nu} | \leqq | \alpha_n + i\beta_n | + \ldots + | \alpha_{n+\nu} + i\beta_{n+\nu} |,$$

a tedy

$$| (\alpha_n + i\beta_n) + \ldots + (\alpha_{n+\nu} + i\beta_{n+\nu}) | < \varepsilon,$$

jakmile $n > p$, čímž výrok dokázán.

Jakož jsem ukázal*), možno každou konvergující řadu

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdot\cdot$$

shrnutím po sobě jdoucích členů přetvořiti na absolutně konvergentní řadu o témž součtu, k čemuž zde budiž jen poukázáno.

Z absolutní konvergence řady (21) soudíme na absolutní konvergenci obou řad (22), a naopak; neboť konverguje-li řada $\Sigma \mid \alpha_n + i\beta_n \mid$, t. j. $\Sigma \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$, konvergují také řady $\Sigma \mid \alpha_n \mid$, $\Sigma \mid \beta_n \mid$, jichž obecný člen nepřesahuje $\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$, a naopak soudíme z konvergence těchto dvou řad na konvergenci řady $\Sigma \{ \mid \alpha_n \mid + \mid \beta_n \mid \}$, a tedy vzhledem k nerovnosti

$$\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \leqq \mid \alpha_n \mid + \mid \beta_n \mid$$

také na konvergenci řady $\Sigma \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$.

Mnohé věty, vyvozené o řadách reálných, možno přenésti téměř doslovně na řady komplexní; stačí v příslušné úvaze nahraditi pojem číselné hodnoty pojmem absolutní hodnoty komplexního čísla. Tak n. p. se přemístěním členů absolutně konvergující řady komplexní vyvodí nová řada absolutně konvergující o témž součtu; řada geometrická $a + aq + aq^2 + \cdot\cdot$, jejíž první člen a a podíl q jsou čísla komplexní, konverguje při $\mid q \mid < 1$ a má součet $\frac{a}{1-q}$, a diverguje při $\mid q \mid \geqq 1$; platí-li od jistého indexu n stále $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < k$, kde k značí kladné číslo menší než 1, jest řada Σu_n absolutně konvergentní, neboť tu konverguje řada $\Sigma \mid u_n \mid$, a t. d.

Nutná a postačující výminka, aby z konvergentní řady o komplexních členech libovolným jich přemístěním vznikla opět řada konvergentní o témž součtu, jest, aby řada konvergovala absolutně.

Že tu absolutní konvergence stačí, bylo již ukázáno; ostatně to také vychází z absolutní konvergence řad $\Sigma \alpha_n$, $\Sigma \beta_n$, jichž součty se přemístěním členů nezmění, tak že komplexní řada při jakémkoli pořadu členů má vždy součet $\Sigma \alpha_n + i \Sigma \beta_n$. Že absolutní konvergence ta jest nutna, vychází z toho, že v případě, kdy sice $\Sigma (\alpha_n + i\beta_n)$ konverguje, však $\Sigma \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$ diverguje, musí alespoň jedna z řad $\Sigma \mid \alpha_n \mid$, $\Sigma \mid \beta_n \mid$ divergovati, tak že

*) Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, t. VIII: „Deux remarques relatives aux séries.“

lze jiným pořadem členů alespoň jedné z řad $\Sigma\alpha_n$, $\Sigma\beta_n$, docíliti libovolný součet (čl. 23.), čímž pozměněn součet řady

$$\Sigma(\alpha_n + i\beta_n).$$

30. **Početní úkony s řadami.**

Jsou-li

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots,$$
$$s' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots, \tag{23}$$

dvě konvergující řady, konverguje také řada

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots,$$

jejíž obecný člen jest $u_n + v_n$, *a má součet* $s + s'$.

Značíme-li σ_n součet prvních n členů této řady, máme

$$\sigma_n = s_n + s'_n,$$

jsou-li obdobně s_n, s'_n součty prvních n členů daných řad; a tedy

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n = \lim s_n + \lim s'_n = s + s'.$$

Podobně vychází, že řada

$$(u_0 - v_0) + (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \ldots$$

konverguje a že má součet $s - s'$.

Řada

$$au_0 + au_1 + au_2 + \ldots$$

také konverguje a má součet as; neboť

$$\lim (au_0 + au_1 + \ldots + au_{n-1}) = a \lim (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}) = as.$$

Obecněji: řada

$$(au_0 + bv_0) + (au_1 + bv_1) + (au_2 + bv_2) + \ldots$$

konverguje a má součet $as + bs'$, a podobně v případu více řad.

Jsou-li řady (23) *absolutně konvergentní, tu řada*

$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots,$$

kde

$$w_0 = u_0v_0, \quad w_1 = u_0v_1 + u_1v_0, \quad w_2 = u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0, \ldots$$

konverguje absolutně a má součet ss'.

Položme

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1},$$
$$s'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1},$$
$$s''_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1},$$

t. j.

$$s''_n = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + \cdot\cdot$$
$$+ (u_0v_{n-1} + u_1v_{n-2} + \cdot\cdot + u_{n-1}v_0),$$

a předpokládejme nejprve, že všecky členy daných řad (23) jsou kladná čísla. Součin $s_n s'_n$ obsahuje všecky členy v s''_n se vyskytující a ještě jiné členy $u_h v_k$, v nichž totiž $h + k > n - 1$; z toho patrno, že

$$s_n s'_n > s''_n.$$

Položíme-li $\mu = n - 1 + n - 1$, tedy bude

$$s_n s'_n < s''_\mu,$$

poněvadž s''_μ obsahuje všecky součiny $u_h v_k$, při nichž $h + k \leqq \mu$, kdežto $s_n s'_n$ obsahuje ovšem také jen součiny $u_h v_k$, při nichž $h + k \leqq \mu$, ale ne všecky, n. p. obsahuje jediný součin, při němž $h + k = \mu$, t. součin $u_{n-1}v_{n-1}$.

Při $\lim n = \infty$ jest též $\lim \mu = \infty$, a z obou nerovností soudíme

$$\lim (s_n s'_n) \geqq \lim s''_n \,.\, \lim (s_n s'_n) \leqq \lim s''_\mu,$$

a tedy

$$\lim_{n=\infty} s''_n = \lim (s_n s'_n) = \lim s_n \,.\, \lim s'_n = ss',$$

jak bylo dokázati.

Jsou-li za druhé (23) obecně řady komplexní, tu poznamenejme, že

$$s_n s'_n - s''_n = u_{n-1}v_{n-1} + (u_{n-1}v_{n-2} + u_{n-2}v_{n-1}) + \cdot\cdot$$
$$+ (u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + \cdot\cdot + u_1 v_{n-1}).$$

Nahradíme-li na pravé straně každou hodnotu u a v jejím absolutním obnosem, obdržíme patrně $\sigma_n\sigma'_n - \sigma''_n$, značí-li σ_n, σ'_n, σ''_n součty prvních n členů konvergujících řad $\Sigma \mid u_n \mid$, $\Sigma \mid v_n \mid$, resp. řady

$$(24) \qquad \mid u_0v_0 \mid + (\mid u_0v_1 \mid + \mid u_1v_0 \mid)$$
$$+ (\mid u_0v_2 \mid + \mid u_1v_1 \mid + \mid u_2v_0 \mid) + \cdot\cdot,$$

která dle předchozího důkazu také konverguje, majíc za součin $\lim \sigma_n \,.\, \lim \sigma'_n$, t. j. my máme

$$\lim (\sigma_n\sigma'_n - \sigma''_n) = 0, \quad \lim \sigma''_n = \lim \sigma_n, \quad \lim \sigma'_n.$$

Z toho jde vzhledem k

$$\mid s_n s'_n - s''_n \mid \leqq \sigma_n\sigma'_n - \sigma''_n,$$

že také

$$\lim (s_n s'_n - s''_n) = 0, \text{ t. j. } \lim s''_n = \lim s_n \,.\, \lim s'_n = ss',$$

čímž konvergence řady Σw_n dokázána, jakož i že její součet jest ss'. Poněvadž členy řady Σw_n mají absolutní hodnoty nepřesahující členy řady (24). t. j. poněvadž

$$| w_n | \leqq | u_0 v_n | + | u_1 v_{n-1} | + | u_2 v_{n-2} | + \,.\,. + | u_n v_0 |,$$

soudíme, že také řada $\Sigma | w_n |$ konverguje, t. j. že řada Σw_n konverguje absolutně.

31. Řady mocninné.

Často se v analysi vyskytují řady, jichž členy závisí na nějaké *proměnné* x, t. j. na veličině, která může nabývati nekonečně mnoho různých hodnot; mezi řadami takovými jsou nejdůležitější řady mocninné č. potenční, t. j. řady tvaru

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \,.\, . + c_n x^n + \,.\, . \tag{25}$$

Předpokládejme obecně, že jak součinitelé c_ν tak hodnoty x jsou čísla komplexní.

Jest-li číselná hodnota každého členu řady (25) *pro* $x = a$ *menší než určité číslo* A, *konverguje tato řada absolutně pro každé* x *číselně menší než* a.

Dle supposice platí

$$| c_n a^n | < \mathrm{A}, \text{ t. j. } | c_n | < \frac{\mathrm{A}}{| a^n |}.$$

Řada geometrická

$$1 + \frac{| x |}{| a |} + \frac{| x |^2}{| a |^2} + \frac{| x |^3}{| a |^3} + \,.\,.$$

při $| x | < | a |$ konverguje, a tedy také řada A-krát větší

$$\mathrm{A} + \frac{\mathrm{A}}{| a |} | x | + \frac{\mathrm{A}}{| a |^2} | x |^2 + \,.\,.,$$

a tedy také řada

$$| c_0 | + | c_1 x | + | c_2 x^2 | + | c_3 x^3 | + \,.\,.,$$

jejíž členy jsou vzhledem k předchozí nerovnosti menší, čímž věta — vyslovená *Abelem* — dokázána.

Existuje-li limita

$$\lim_{n = \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = l,$$

jest limita podílu dvou sousedních členů řady (25) lx, a tedy konverguje tato řada při

$$| lx | < 1, \text{ t. j. } | x | < \frac{1}{| l |}$$

a diverguje při $| x | > 1 : | \lambda |$, kdežto při $| x | = | l |$ není rozhodnuto.

Konverguje-li mocninná řada (25) *pro* $x = b$, *konverguje absolutně pro každé* x, *jehož absolutní hodnota jest menší než* $| b |$.

Z konvergence řady

$$c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + c_3 b^3 + \ldots$$

soudíme, že $| c_n b^n |$ jest hodnota libovolně malá, jakmile $n > p$, tedy $| c_n b^n | < \alpha$, značí-li α libovolně volené kladné číslo. Zvolíme-li číslo A větší než α a zároveň větší než každé z čísel

$$| c_0 |, \ | c_1 b |, \ | c_2 b^2 |, \ldots | c_p b^p |,$$

jest

$$| c_n b^n | < A$$

při každém n, a tedy řada (25) při $| x | < | b |$ absolutně konvergentní.

Diverguje-li řada mocninná pro $x = b$, *diverguje pro každé* x, *jež hoví nerovnosti* $| x | > | b |$; neboť kdyby se našlo x_1 hovící této nerovnosti, pro něž by řada (25) konvergovala, dle předchozí věty musila by také pro $x = b$ konvergovati, proti supposici.

Z obou předchozích výroků jde, že vzhledem k libovolné řadě mocninné se veškeré hodnoty komplexní x seřaďují do tří skupin. Hodnoty první skupiny jsou charakterisovány nerovností $| x | < R$, hodnoty druhé skupiny nerovností $| x | > R$, kde R značí určitou kladnou hodnotu, jež se může také redukovati na 0 neb býti ∞, hodnoty třetí skupiny rovností $| x | = R$; hodnoty první skupiny jsou takové, že řada (25) pro ně konverguje absolutně, t. j. že konverguje řada

$$| c_0 | + | c_1 | \ | x | + | c_2 | \ | x |^2 + \ldots,$$

a hodnoty x druhé skupiny jsou ty, pro něž řada (25) a tedy také tato řada diverguje.

Jest totiž patrné, že pro $x = 0$ řada (25) konverguje, mající součet c_0.

Roste-li x od 0, nabývajíc reálných kladných hodnot, tu 1. buď řada $\Sigma | c_n x^n |$ diverguje pro každé $x > 0$, a pak jest $R = 0$; aneb řada konverguje pro hodnoty $x > 0$; nekonverguje-li 2. pro

všecky, buď R největší kladná hodnota x, pro niž konverguje, tak že pro $x > R$ diverguje, a konverguje-li 3. pro všecky, jest $R = \infty$.

V prvním případě dle předchozí věty řada (25) konverguje jen pro $x = 0$, a diverguje pro každé komplexní x, jehož absolutní hodnota jest > 0, tudíž se skládá první skupina hodnot x z jediné hodnoty $x = 0$, druhá obsahuje hodnoty hovící $|x| > 0$, tudíž $R = 0$.

V druhém případě konverguje řada (25) při $|x| < R$ absolutně, a při $|x| > R$ diverguje dle téže předchozí věty.

V třetím případě konverguje řada pro každé x, jest tedy $R = \infty$, a všecky hodnoty x jsou v první skupině.

Hodnoty x hovící $|x| < R$ jsou geometricky znázorněny body položenými uvnitř kružnice, opsané poloměrem R kolem bodu 0; kružnici tu nazval *Cauchy kružnicí konvergenční a* R *poloměrem konvergenčním řady mocninné* (25).

Řada n. p.

$$1 + x + 1 \,.\, 2\, x^2 + 1 \,.\, 2 \,.\, 3\, x^3 + \cdot\,\cdot$$

konverguje jen pro $x = 0$, tak že $R = 0$; podíl $u_{n+1} : u_n$ jest zde nx, a poněvadž $|nx| > 1$ pro dosti velké n, rostou absolutní hodnoty členů od jistého indexu, a řada tudíž diverguje.

O řadě binomické

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)\, x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{m(m-1)\,(m-2) x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \cdot\,\cdot,$$

uvažované v čl. 26. pro reálné hodnoty x, jsme shledali, že konverguje při $|x| < 1$ a diverguje při $|x| > 1$; jest tedy $R = 1$ její konvergenční poloměr, t. j. řada konverguje absolutně pro každé komplexní x, znázorněné bodem uvnitř kružnice, opsané poloměrem 1 kolem bodu nullového, a diverguje pro každé x, znázorněné bodem mimo tento kruh položeným.

Tamže jsme nalezli, že řada exponenciálná

$$1 + x + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \cdot\,\cdot$$

konverguje pro každé reálné x; jest tedy $R = \infty$ její konvergenční poloměr, t. j. řada konverguje absolutně pro každé komplexní x.

32. Stejnoměrná konvergence řady.

Dána-li reálná nekonečná řada

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{26}$$

jejíž členy jsou závislé na proměnné x, a konverguje-li tato řada pro všechna x hovící požadavku $a \leqq x \leqq b$ čili v intervallu $(a \ldots b)$, tu pravíme, že *konverguje v tomto intervallu stejnoměrně* (uniformément, gleichmässig), *možno-li, po vytknutí libovolného kladného čísla* ε, *udati číslo* p *takové, aby zbytek řady* R_n *byl číselně menší než* ε, *jakmile* $n > p$, *nechť jest* x *kterákoli hodnota v daném intervallu**).

Při stejnoměrné konvergenci možno tedy udati určitý počet členů, jichž součet vystihuje hodnotu řady s libovolnou přesností, nechať jest x jakékoli v daném intervallu.

Jest patrno, že stejnoměrnou konvergenci řady (26) možno také definovati faktem, že ku každé kladné hodnotě ε existuje číslo p takové, že pro $n > p$ a pro každé x intervallu platí

$$| u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+\nu} | < \varepsilon,$$

nechť jest ν jakékoli.

Z definice přímo patrno, že, je-li řada (26) stejnoměrně konvergentní ve dvou intervallech $(a \ldots b)$, $(b \ldots c)$, k sobě přiléhajících, jest také stejnoměrně konvergentní v intervallu $(a \ldots c)$.

Abychom ukázali, že existují řady konvergující pro každé x daného intervallu, avšak nikoli stejnoměrně, vezměme v úvahu řadu

$$\frac{x}{1 \cdot (x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} + \cdots + \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} + \cdots;$$

při $x = 0$ vymizí všecky členy a součet řady jest 0; při $x > 0$ pišme, vzhledem k totožnosti

$$\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} = \frac{x}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1},$$

řadu ve tvaru

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}\right) + \cdots,$$

*) *Seidel*, Abh. d. Münch. Acad., II. Cl. V., 2. A., p. 380; *Stolz*, Allgem. Arithmetik I., p. 343.

z něhož patrno, že součet prvních n členů jest

$$s_n = 1 - \frac{1}{nx+1},$$

a tedy součet řady $s = \lim_{n=\infty} s_n = 1$. Konverguje tedy řada pro všecky hodnoty x intervallu $(0 \ldots b)$, $b > 0$, majíc pro $x = 0$ součet 0 a pro všecky ostatní hodnoty x součet 1.

Při $x > 0$ jest zbytek

$$R_n = s - s_n = \frac{1}{nx+1},$$

a nelze jej volbou dosti velkého n učiniti $< \varepsilon$ pro každé x intervallu; neboť nechť jest n jakkoli velké, stačí vzíti $x = \frac{1}{n}$, aby $R_n = \frac{1}{2}$ nekleslo pod libovolně malé ε. Řada tedy v intervallu $(0 \ldots b)$ konverguje, avšak nikoli stejnoměrně.

Jinak se má věc, vytkneme-li intervall $(a \ldots b)$, omezený dvěma čísly $a > 0$, $b > a$; požadavek $R_n < \varepsilon$ vymáhá, aby

$$n > \frac{1-\varepsilon}{x\varepsilon},$$

a nerovnost ta jest vyplněna pro každé x intervallu $(a \ldots b)$, volíme-li $n > \frac{1-\varepsilon}{a\varepsilon}$. Jest tedy řada v intervallu $(a \ldots b)$ stejnoměrně konvergentní.

Pojem stejnoměrné konvergence možno zcela obdobným způsobem vytknouti pro řadu (26), závisí-li její členy na komplexní proměnné x. *Konverguje-li řada* (26) *pro nekonečné množství komplexních hodnot x, jichž souhrn nazveme oborem konvergenčním, pravíme, že konverguje v tomto oboru stejnoměrně, možno-li pro libovolné kladné ε udati číslo p takové, aby při $n > p$ a při každém ν platila nerovnost*

$$| u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+\nu} | < \varepsilon.$$

nechť jest x kterékoli číslo konvergenčního oboru. Patrně pak $| R_n | \leqq \varepsilon$ klesá pod každé kladné číslo, nechť jest x kterékoli číslo toho oboru, a naopak.

Naplňují-li body, znázorňující hodnoty x oboru konvergenčního, čáru neb plochu, pravíme stručně, že řada konverguje stejnoměrně na této čáře neb v této ploše.

Řada mocninná konverguje stejnoměrně na každé čáře a v každé ploše obsažené uvnitř kružnice konvergenční.

Řada mocninná

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

měj konvergenční poloměr R; uvnitř kružnice konvergenční buď vytknuta libovolná čára neb plocha Ω, jejíž body nechť znázorňují komplexní hodnoty proměnné x. Označme ϱ největší hodnotu $|x|$, tak že pro každé x platí $|x| \leqq \varrho < R$. Poněvadž řada pro $x = \varrho$ konverguje absolutně (čl. 31.), máme k libovolnému kladnému číslu ε číslo p takové, že pro $n > p$ platí

$$|c_n| \varrho^n + |c_{n+1}| \varrho^{n+1} + \ldots + |c_{n+\nu}| \varrho^{n+\nu} < \varepsilon,$$

při libovolném ν. Avšak vzhledem k $|x| \leqq \varrho$ platí

$$|c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \ldots + c_{n+\nu} x^{n+\nu}| \leqq |c_n| \varrho^n + |c_{n+1}| \varrho^{n+1} + \ldots + |c_{n+\nu}| \varrho^{n+\nu},$$

tedy

$$|c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \ldots + c_{n+\nu} x^{n+\nu}| < \varepsilon, \quad n > p,$$

čímž věta dokázána.

Zcela obdobně možno dokázati větu*):

Závisí-li členy řady na proměnné x a nepřesahují-li jich absolutní hodnoty, pro všecka x jistého oboru, korrespondující členy konvergující řady o kladných členech, tu řada v onom oboru konverguje stejnoměrně a absolutně.

Budiž $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ daná řada, jejíž členy závisí na x, a mějme pro všecka x jistého oboru

$$|u_\nu| \leqq a_\nu,$$

kde a_ν jsou kladná čísla, a řada $\sum_{0}^{\infty} a_\nu$ konverguje. Pak řada Σu pro všecka x oboru onoho konverguje absolutně dle čl. 24.; volíme-li dále libovolné kladné ε, můžeme udati index p takový, že

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu < \varepsilon, \quad n > p,$$

a tím více jest pak pro každé x onoho oboru

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\infty} u_\nu \right| < \varepsilon, \quad n > p,$$

*) *Weierstrass,* Zur Functionenlehre, Monatsber. d. kgl. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1880, aneb: Abhandlungen aus der Functionenlehre, pag. 70.

čímž dokázána i stejnoměrná konvergence řady Σu.

N. p. řada

$$1 + \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1 \cdot 2\,(2+x)} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3\,(3+x)} + \cdot\cdot$$

konverguje absolutně a stejnoměrně v každém intervallu $(0 \,..\, a)$, kde a značí libovolné kladné číslo; jsouť její členy číselně menší než členy konvergující řady

$$1 + a + \frac{a^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdot\cdot$$

33. Konvergence nekonečných součinů.

Jest-li u_1, u_2, u_3 .. nekonečná řada určitých hodnot, reálných neb komplexních, pravíme, že nekonečný součin

$$u_1 u_2 u_3 \,..\quad \text{čili} \quad \prod_{n=1}^{\infty} u_n \tag{27}$$

konverguje, je-li posloupnost parciálných součinů

$$p_1 = u_1,\quad p_2 = u_1 u_2,\quad \ldots,\quad p_n = u_1 u_2 \,..\, u_n,\,..$$

konvergentní, t. j. existuje-li konečná limita $\lim p_n$ pro $n = \infty$, a ta se pak zove hodnotou nekonečného součinu; není-li ona posloupnost konvergentní, t. j. neexistuje-li konečná ona limita aneb jest-li $\lim |\, p_n \,| = \infty$, nazýváme nekonečný součin divergentním a nepřipisujeme mu žádné hodnoty.

Dle čl. 13. jest nutná a postačující výminka pro existenci konečné limity $\lim p_n$ ta, aby ku každé kladné hodnotě ε existovalo číslo m takové, by při $n > m$ platila pro každé ν nerovnost

$$|\, p_{n+\nu} - p_n \,| < \varepsilon.$$

Je-li některý součinitel u_n nullou, jest 0 hodnotou nekonečného součinu, nechť jsou ostatní součinitelé jakákoli čísla. Nekonečný součin ale může míti hodnotu 0, aniž by některý člen jeho byl 0, jako n. p. součin patrně konvergující, v němž každé $u_n = \frac{1}{2}$, aneb součin, v němž $u_n = \frac{1}{n}$. Obecněji možno říci, *že, platí-li od* $n > m$ *nerovnost* $|\, u_n \,| < k < 1$, *jest*

$$\prod_{1}^{\infty} u_n = 0,$$

a platí-li nerovnost $|u_n| > k > 1$, *jest tento součin divergující* a s. lim $|p_n| = \infty$; v prvním případě máme, volivše $n > m$,

$$|p_n| < |p_m| k^{n-m}, \quad \lim_{n=\infty} k^{n-m} = 0,$$

a v druhém

$$|p_n| > |p_m| k^{n-m}, \quad \lim_{n=\infty} k^{n-m} = \infty.$$

Doleji (čl. 34.) vytkneme nekonečné součiny, jichž členy se blíží 1, a jichž hodnota jest přece 0.

Nepřihlížíme-li k nekonečným součinům, jichž hodnota jest 0, čímž vyloučíme z úvahy právě uvedené nezajímavé a do veliké míry libovolné součiny, možno konvergenci jejich vystihnouti jednodušším způsobem touto větou:

Nutná, a není-li žádný člen u_n *nullou, také postačující výminka, by nekonečný součin* (27) *konvergoval k hodnotě různé od nully, jest, aby ku každému kladnému* ε *existovalo kladné číslo* m *takové, že při* $n > m$ *pro libovolné* ν *platí*

$$|u_{n+1} u_{n+2} \ldots u_{n+\nu} - 1| < \varepsilon. \tag{28}$$

Abychom ukázali, že k tomu nerovnost ta jest nutna, supponujme, že součin (27) má hodnotu p různou od nully, t. j., že

$$\lim_{n=\infty} p_n = p, \quad |p| > 0.$$

Volíce $\varepsilon' > 0$ libovolně, existuje číslo m' takové, že při $n > m'$ platí

$$|p - p_n| < \varepsilon', \text{ a ovšem také } |p - p_{n+\nu}| < \varepsilon',$$

z čehož

$$|p - p_n - (p - p_{n+\nu})| < 2\varepsilon', \quad \text{t. j.} \quad |p_{n+\nu} - p_n| < 2\varepsilon'.$$

Dále patrně

$$|p| - |p_n| \leqq |p - p_n| < \varepsilon', \quad \text{tedy} \quad |p_n| > |p| - \varepsilon'.$$

Z posledních dvou nerovností soudíme, že při $n > m'$ platí

$$\left| \frac{p_{n+\nu} - p_n}{p_n} \right| = \left| \frac{p_{n+\nu}}{p_n} - 1 \right| < \frac{2\varepsilon'}{|p| - \varepsilon'},$$

předpokládajíce volené $\varepsilon' < |p|$; nerovnost tu můžeme psáti

$$|u_{n+1} u_{n+2} \ldots u_{n+\nu} - 1| < \frac{2\varepsilon'}{|p| - \varepsilon'},$$

a ta souhlasí s nerovností (28), kterou jsme chtěli odvoditi, položíme-li

$$\frac{2\varepsilon'}{|p| - \varepsilon'} \lessgtr \varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad \varepsilon' < \frac{\varepsilon |p|}{2 + \varepsilon}.$$

Ale nerovnost (28) také stačí, aby byl zabezpečen $\lim p_n$ různý od nully, není-li žádný součinitel $u_n = 0$; možno ji totiž psáti

$$\left| \frac{p_{n+\nu}}{p_n} - 1 \right| < \varepsilon, \quad n > m,$$

a z ní vysvítá správnost dvou nerovností současných*)

$$\left| \frac{p_{n+\nu}}{p_n} \right| - 1 < \varepsilon, \quad 1 - \left| \frac{p_{n+\nu}}{p_n} \right| < \varepsilon$$

čili $$(1 - \varepsilon) |p_n| < |p_{n+\nu}| < (1 + \varepsilon) |p_n|.$$

Volíme-li tedy za n určité číslo $n_1 > m$ a nazveme-li γ největší z čísel

$$|p_1|, \ |p_2|, \ \ldots \ |p_{n_1 - 1}|, \ (1 + \varepsilon) |p_{n_1}|,$$

a $k > 0$ nejmenší z čísel

$$|p_1|, \ |p_2|, \ \ldots \ |p_{n_1 - 1}|, \ (1 - \varepsilon) |p_{n_1}|,$$

máme při $n > m$ nerovnosti

$$k < |p_n| < \gamma.$$

Ze supponované nerovnosti (28)

$$\left| \frac{p_{n+\nu} - p_n}{p_n} \right| < \varepsilon \quad \text{čili} \quad |p_{n+\nu} - p_n| < \varepsilon |p_n|$$

nyní soudíme

$$|p_{n+\nu} - p_n| < \gamma\varepsilon,$$

t. j. p_n má pro $\lim n = \infty$ konečnou limitu p; a vzhledem ku $|p_n| > k$ soudíme, že $|p| \geqq k$, t. j., že p jest různé od nully, jak bylo dokázati.

Učiníme-li v nutné výmince (28) pro existenci $\lim p_n \lessgtr 0$ speciálně $\nu = 1$, máme $|u_{n+1} - 1| < \varepsilon$, jakmile $n > m$, a položíme-li součinitele u_n do tvaru $u_n = 1 + a_n$, t. j. nekonečný součin do tvaru

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \ldots .$$

*) $Z |A + B| < k$, soudíme $|A' - B'| \leqq |A + B| < k$ (čl. 16.), značí-li A', B' absolutní hodnoty čísel A, B.

máme $|a_n| < \varepsilon$, t. j. $\lim a_n = 0$ *jako nutnou výminku pro to, aby nekonečný součin konvergoval k hodnotě různé od nully*; výminka ta ale nestačí, jakož ještě shledáme. — Zároveň patrno, *že při vyplněné výmince* (28) *může* $\lim p_n$ *jen tenkráte býti* 0, *kdy alespoň jeden součinitel* u_n *vymizí.*

Jest na místě poznamenati, že nerovností (28) jest zajištěno faktum, že pro dosti velké n parciálný součin p_n se přibráním libovolného počtu dalších součinitelů změní jen o libovolně malou hodnotu. Poněvadž do nerovnosti (28) vcházejí jen členy u_n s indexem $n > m$, nemají první členy nekonečného součinu na jeho konvergenci vlivu.

Nekonečný součin v posledním tvaru psaný snadno se nahradí nekonečnou řadou

$$u_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots;$$

stačí totiž položiti $v_n = p_{n-1} a_n$, aby parciálné součiny p_n se shodovaly s parciálnými součty s_n této řady. Skutečně pak

$$\begin{aligned} p_2 &= u_1 (1 + a_2) = u_1 + v_2, \\ p_3 &= p_2 (1 + a_3) = p_2 + v_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= p_{n-1} (1 + a_n) = p_{n-1} + v_n, \end{aligned}$$

a sečtením těchto rovnic

$$p_n = u_1 + v_2 + v_2 + \ldots + v_n.$$

34. **Kriterium konvergence pro součiny reálné.**

Uvažujme nejprve nekonečný součin o kladných členech, vesměs větších jednice

$$(1 + a_1) (1 + a_2) \ldots, \tag{29}$$

v němž tedy $a_1, a_2, \ldots$ značí hodnoty kladné.

Parciálný součin p_n patrně roste s číslem n, a aby měl konečnou limitu, jest nutné a stačí, když každé p_n jest menší než určité číslo (čl. 13.). Avšak patrně

$$p_n = (1 + a_1) \ldots (1 + a_n) > 1 + a_1 + \ldots + a_n,$$

musí tedy pak součet s_n u řady

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

býti menší než určité číslo, *t. j. řada tato musí konvergovati.*

Ale i opak platí, t. j. konverguje-li tato řada, konverguje i nekonečný součin; neboť pak pro libovolné kladné ε, jež volme < 1, existuje takové m, že při $n > m$ platí

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+\nu} < \varepsilon,$$

a tedy také

$$\frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{1 + a_{n+2}} + \ldots + \frac{a_{n+\nu}}{1 + a_{n+\nu}} < \varepsilon,$$

kde v levo každý sčítanec jest menší než 1. Nyní

$$\frac{1}{p_n} = \frac{1}{p_m} \cdot \frac{1}{1 + a_{m+1}} \ldots \frac{1}{1 + a_m}$$

$$= \frac{1}{p_m}\left(1 - \frac{a_{m+1}}{1 + a_{m+1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{a_n}{1 + a_n}\right)$$

a tedy*)

$$\frac{1}{p_n} > \frac{1}{p_m}\left(1 - \frac{a_{m+1}}{1 + a_{m+1}} - \ldots - \frac{a_n}{1 + a_n}\right) > \frac{1}{p_m}(1 - \varepsilon),$$

tedy $p_n < \frac{p_m}{1 - \varepsilon}$ pro každé $n > m$, z čehož (čl. 13.) patrno, že p_n pro $\lim n = \infty$ konverguje k určité limitě.

Konverguje-li nekonečný součin (29) o kladných členech větších jedničky, a jest-li L hodnota větší, l hodnota menší než hodnota p součinu (29), jest každý parciálný součin $p_n < \mathrm{L}$, a s druhé strany lze n vždy tak voliti, aby $p_n > l$, neboť jinak by nemohla platiti rovnost $\lim p_n = p$ a současně nerovnosti $l < p < \mathrm{L}$.

Z této vlastnosti ihned soudíme, že v konvergujícím nekonečném součinu, jehož členy jsou větší jedničky, možno pořad součinitelů libovolně změniti, aniž by se porušila konvergence neb hodnota součinu. Každý parciálný součin původního a tedy i nového nekonečného součinu jest menší než L; konververguje tedy nový součin a má hodnotu $\leq \mathrm{L}$. V původním a tedy i v novém součinu možno vytknouti parciálný součin $> l$; jest tedy hodnota nového součinu $> l$. Hodnota nového nekonečného součinu, jsouc větší než každé číslo $l < p$, a zároveň menší než každé číslo $\mathrm{L} > p$, se nutně rovná p.

---

*) Jsou-li $b_1, b_2, b_3, \ldots$ kladné hodnoty menší než 1, máme nerovnost $(1 - b_1)(1 - b_2) \ldots (1 - b_n) > 1 - b_1 - b_2 \ldots - b_n$; skutečně

$(1 - b_1)(1 - b_2) = 1 - b_1 - b_2 + b_1 b_2 > 1 - b_1 - b_2$, a tedy

$(1 - b_1)(1 - b_2)(1 - b_3) > (1 - b_1 - b_2)(1 - b_3) > 1 - b_1 - b_2 - b_3$, a t. d.

Také u nekonečného součinu

$$(1 - a_1)\,(1 - a_2)\,(1 - a_3)\,\ldots, \tag{30}$$

kde $a_1, a_2, a_3 \ldots$ značí kladná čísla různá od 1, *jest nutná a postačující výminka, aby konvergoval a s. k hodnotě různé od nully, konvergence řady*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Předpokládejme, pro snazší důkaz, že $a_1, a_2, \ldots$ jsou vesměs menší než jisté číslo $\alpha < 1$; obmezení to jest dovolené vzhledem k okolnosti, že stačí zkoumati konvergenci součinu po vynechání libovolného počtu prvních členů jeho, a vzhledem k tomu, že u konvergujícího součinu jest $\lim a_n = 0$ pro $\lim n = \infty$.

Pro reciprokou hodnotu parciálného součinu p_n součinu (30) máme

$$\frac{1}{p_n} = \left(1 + \frac{a_1}{1 - a_1}\right)\left(1 + \frac{a_2}{1 - a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{a_n}{1 - a_n}\right).$$

Všecky součinitele na pravo jsou větší než 1, pročež jest konvergence řady o kladných členech

$$\frac{a_1}{1 - a_1} + \frac{a_2}{1 - a_2} + \cdots \tag{31}$$

nutná a postačující k zabezpečení $\lim \frac{1}{p_n}$ pro $n = \infty$. Členy této řady jsou ale patrně obsaženy mezi korrespondujícími členy řad

$$\frac{a_1}{1 - \alpha} + \frac{a_2}{1 - \alpha} + \ldots,$$

$$a_1 + a_2 + \ldots,$$

jež současně konvergují a zároveň s řadou (31). Aby tedy hodnota $\frac{1}{p_n}$ měla limitu, čili aby součin p_n měl limitu různou od nully při $n = \infty$, jest nutno a stačí, aby konvergovala řada Σa_n.

Také v konvergentním součinu (30) možno libovolně změniti pořad faktorů, aniž by se porušila konvergence neb hodnota součinu; neboť součin o členech větších než jednice:

$$\left(1 + \frac{a_1}{1 - a_1}\right)\left(1 + \frac{a_2}{1 - a_2}\right) \cdots$$

také konverguje, a možno tedy pořad členů v něm libovolně měniti, a tudíž také v součinu reciprokých hodnot jeho faktorů, t. j. v součinu (30).

V nekonečném součinu $\Pi(1 + a_n)$, kde sice $\lim a_n = 0$, ale řada o kladných členech Σa_n diverguje, máme vzhledem k

$$p_n > 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

patrně $\lim p_n = \infty$, tedy součin diverguje, kdežto hodnota součinu $\Pi(1 - a_n)$, kde $0 < a_n < 1$ a Σa_n opět diverguje, jest 0; skutečně pak

$$\frac{1}{p_n} = \left(1 + \frac{a_1}{1 - a_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{a_n}{1 - a_n}\right) > 1 + \frac{a_1}{1 - a_1} + \ldots + \frac{a_n}{1 - a_n},$$

tedy i

$$\frac{1}{p_n} > 1 + a_1 + \ldots + a_n, \quad \lim \frac{1}{p_n} = \infty, \quad \lim p_n = 0.$$

Budiž konečně

$$(1 + a_1)\ (1 + a_2)\ (1 + a_3) \ldots \tag{32}$$

nekonečný součin, v němž čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jsou kladná neb záporná, ale taková, že řada Σa konverguje absolutně. Označíme-li $b_1, b_2, \ldots$ ona z čísel $a_1, a_2, \ldots$, jež jsou kladná, a $-c_1, -c_2, \ldots$ ona, jež jsou záporná, jsou řady Σb a Σc konvergentní (čl. 22.) a tudíž i nekonečné součiny $\Pi(1 + b_n)$, $\Pi(1 - c_n)$, a zároveň konverguje také druhý k hodnotě různé od nully, nevymizí-li žádný součinitel $1 - c_n$. Snadno lze nahlédnouti, jako u řad v cit. článku, že součin

$$p_n = (1 + a_1)\ (1 + a_2) \ldots (1 + a_n)$$

pro $\lim n = \infty$ má limitu, rovnající se součinu hodnot $\prod_1^\infty (1 + b_n)$, $\prod_1^\infty (1 - c_n)$.

Nekonečný součin (32), v němž $a_1, a_2, \ldots$ jsou kladná neb záporná čísla, sluje *absolutně konvergentním*, jest-li řada Σa_n absolutně konvergentní. Předchozí úvahy pak ukazují, že součin prvních n faktorů absolutně konvergujícího nekonečného součinu se blíží s rostoucím n určité limitě, a ta sluje hodnotou nekonečného součinu, dále že tato hodnota jest nezávislá na pořadu součinitelů $(1 + a_n)$, a konečně, že tato hodnota jest 0 jen tenkráte, kdy některý z těchto součinitelů vymizí.

N. p. hodnota nekonečného součinu

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \ldots$$

jest 0, poněvadž řada $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ diverguje. Při součinu

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\ldots$$

máme

$$p_n = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \ldots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}{2 \cdot 3 \ldots n} \cdot \frac{3 \cdot 4 \ldots (n+1)}{2 \cdot 3 \ldots n} = \frac{n+1}{2n}$$

a tedy $\lim p_n = \frac{1}{2}$ hodnota jeho. Z toho soudíme, že řada

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

konverguje, jakož i v čl. 25. ukázáno.

35. **Kriterium konvergence nekonečných součinů komplexních.**

Konverguje-li řada o komplexních členech

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

absolutně, konverguje také nekonečný součin

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)\ldots$$

a s. k číslu p různému od 0, *není-li žádný z faktorů* $1 + a_n$ *nullou**).

Položme $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, kde α_n, β_n jsou čísla reálná, a

$$P_n = (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) = p_n + iq_n,$$

$$| p_n + iq_n | = \sqrt{p_n^2 + q_n^2} = s_n;$$

pak

$$s_n = | 1 + a_1 | \cdot | 1 + a_2 | \ldots | 1 + a_n |$$

$$= \sqrt{(1 + \alpha_1)^2 + \beta_1^2} \cdot \sqrt{(1 + \alpha_2)^2 + \beta_2^2} \ldots$$

$$\ldots \sqrt{(1 + \alpha_n)^2 + \beta_n^2}.$$

Zvolme m tak velké, aby pro $n \geqq m$ platila nerovnost**) $| \alpha_n | + | \beta_n | < 1$, pak

$$\sqrt{(1 + \alpha_n)^2 + \beta_n^2} < 1 + | \alpha_n | + | \beta_n |,$$

$$\sqrt{(1 + \alpha_n)^2 + \beta_n^2} > 1 - | \alpha_n | - | \beta_n |.$$

---

*) *Cauchy*, Analyse algébrique, Note IX; *Weierstrass*, Ueber die Theorie der analytischen Facultäten, § 5, Crelle t. LI, aneb Abh. aus der Functionenlehre, p. 210.

**) Ze supponované absolutní konvergence řady Σa_n jde, že $\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$ se stává libovolně malým pro dosti velké n, a tedy také $| \alpha_n | + | \beta_n |$.

Z toho patrno, že podíl $\frac{s_n}{s_m}$ při $n > m$ jest obsažen mezi součinem

$$(1 - \alpha'_{m+1} - \beta'_{m+1})\ (1 - \alpha'_{m+2} - \beta'_{m+2})\ \ldots\ (1 - \alpha'_n - \beta'_n)$$

a součinem

$$(1 + \alpha'_{m+1} + \beta'_{m+1})\ (1 + \alpha'_{m+2} + \beta'_{m+2})\ \ldots\ (1 + \alpha'_n + \beta'_n),$$

kde pro pohodlí psáno α', β' místo $|\alpha|$, $|\beta|$.

Při rostoucím n však oba tyto součiny dle předešlého článku konvergují k určitým kladným hodnotám A, B, jelikož řada $\Sigma(\alpha'_n + \beta'_n)$ konverguje, jsouc součtem konvergujících řad $\Sigma\alpha'_n$, $\Sigma\beta'_n$. Mezi hodnotami A a B jest podíl $\frac{s_n}{s_m}$ obsažen, poněvadž prvnímu součinu s rostoucím n stále ubývá, druhému stále přibývá, a tedy jest s_n mezi As_m a Bs_m, nechť jest n jakkoli veliké; jest tedy každá z hodnot $|p_n|$, $|q_n|$ menší než Bs_m.

Nyní z

$$p_{n+1} + iq_{n+1} = (1 + \alpha_{n+1} + i\beta_{n+1})\ (p_n + iq_n)$$

soudíme, porovnáním reálných a ryze imaginárných hodnot, že

$$p_{n+1} - p_n = \alpha_{n+1}p_n - \beta_{n+1}q_n,\quad q_{n+1} - q_n = \alpha_{n+1}q_n + \beta_{n+1}p_n,$$

z čehož, klademe-li posloupně m, $m + 1, \ldots, m + r$ na místo n, obdržíme sečtením

$$\begin{aligned} p_{m+r} - p_m &= \alpha_{m+1}p_m + \alpha_{m+2}p_{m+1} + \ldots + \alpha_{m+r}p_{m+r-1} \\ &\quad - \beta_{m+1}q_m - \beta_{m+2}q_{m+1} - \ldots - \beta_{m+r}q_{m+r-1}, \\ q_{m+r} - q_m &= \alpha_{m+1}q_m + \alpha_{m+2}q_{m+1} + \ldots + \alpha_{m+r}q_{m+r-1} \\ &\quad + \beta_{m+1}p_m + \beta_{m+2}p_{m+1} + \ldots + \beta_{m+r}p_{m+r-1}. \end{aligned}$$

Obě řady $\Sigma|\alpha_n|$, $\Sigma|\beta_n|$ jsou konvergentní, a hodnoty p_n, q_n číselně pod určitým číslem Bs_m; jsou tedy také čtyři řady konvergentní:

$$\begin{aligned} p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots;\ p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + \ldots, \\ q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \ldots;\ q_1\beta_1 + q_2\beta_2 + \ldots, \end{aligned}$$

tak že pro dosti velké m výrazy po pravých a tedy také po levých stranách posledních dvou rovnic se stávají číselně libovolně malé, nechť jest r jakékoli, t. j. hodnoty p_n, q_n mají pro $\lim n = \infty$ konečné limity.

Obě tyto limity nemohou současně býti 0, neb by pak $s_n = \sqrt{p_n^2 + q_n^2}$ mělo též limitu 0, což by ale dle předchozího

článku vymáhalo, aby některý faktor $\sqrt{(1+\alpha_n)^2+\beta_n^2}$ součinu s vymizel, t. j. aby některé $a_n = -1$. Případ mizícího faktoru v daném nekonečném součinu $\Pi(1+a_n)$ však vylučujeme z úvahy, poněvadž pak při n dosti velkém každý parciálný součin P_n jest 0.

Posouzení konvergence nekonečného součinu se mnohdy usnadní větou:

„Konverguje-li součin $\overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\Pi}}(1+\alpha_\nu)$, kde $\alpha_\nu = |a_\nu|$, tu konverguje také součin $\overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\Pi}}(1+a_\nu)$."

Vynásobením shledáme, že rozdíl

$$\overset{n+k}{\underset{\nu=1}{\Pi}}(1+a_\nu) - \overset{n}{\underset{\nu=1}{\Pi}}(1+a_\nu)$$

se skládá ze sčítanců tvaru $a_i a_j \ldots$, tak že jej můžeme psáti $\Sigma a_i a_j \ldots$; pak ale nahradivše a obecně absolutní hodnotou α, máme

$$\overset{n+k}{\underset{1}{\Pi}}(1+\alpha_\nu) - \overset{n}{\underset{1}{\Pi}}(1+\alpha_\nu) = \Sigma \alpha_i \alpha_j \ldots,$$

a tudíž

$$\left| \overset{n+k}{\underset{1}{\Pi}}(1+a_\nu) - \overset{n}{\underset{1}{\Pi}}(1+a_\nu) \right| < \left| \overset{n+k}{\underset{1}{\Pi}}(1+\alpha_\nu) - \overset{n}{\underset{1}{\Pi}}(1+\alpha_\nu) \right|.$$

Ze supponované konvergence součinu $\Pi(1+\alpha_\nu)$ ale plyne, že pravá strana se stává při $n > m$ libovolně malou, nechť jest k jakékoli, a tedy také levá strana, čímž věta dokázána.

36. **Stejnoměrná konvergence součinu.**

Mějme nekonečný součin reálný

$$u_1 \, u_2 \, u_3 \ldots,$$

jehož členy závisejí na proměnné x, a předpokládejme, že konverguje pro všecky hodnoty x intervallu $(a \ldots b)$, č. stručněji, že konverguje v tomto intervallu. Jest-li tomu tak, a přísluší-li mimo to každému kladnému číslu ε určité kladné číslo m takové, že při $n > m$ platí nerovnost

$$\left| \overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\Pi}} u_\nu - \overset{n}{\underset{\nu=1}{\Pi}} u_\nu \right| < \varepsilon \tag{32}$$

pro každé x intervallu, pravíme, že nekonečný součin konverguje stejnoměrně v intervallu $(a \ldots b)$.

Máme-li n. p. pro všecky hodnoty x intervallu $(a \ldots b)$ nerovnosti

(33) $$| a_1 | < g_1, \quad | a_2 | < g_2, \ldots,$$

kde $g_1, g_2 \ldots$ značí kladná čísla taková, že řada Σg_ν konverguje, tu konverguje součin

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \ldots$$

v intervallu $(a \ldots b)$ absolutně a stejnoměrně.

Z učiněných supposic jest konvergence řady $\Sigma | a_\nu |$ patrna a tedy konverguje také napsaný součin a s. absolutně.

Z konvergence součinu $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + g_\nu)$ jest patrné, že při libovolném kladném ε platí nerovnost

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + g_\nu) - \prod_{\nu=1}^{n}(1 + g_\nu) < \varepsilon,$$

jakmile $n > m$, t. j. že pak

(34) $$(1 + g_1)(1 + g_2) \ldots$$
$$(1 + g_n)[-1 + (1 + g_{n+1})(1 + g_{n+2}) \ldots] < \varepsilon.$$

Avšak při každém x daného intervallu máme

$$| (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) |$$
$$< (1 + g_1)(1 + g_2) \ldots (1 + g_n)$$

a

$$| -1 + (1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \ldots (1 + a_{n+k}) |$$
$$< -1 + (1 + g_{n+1}) \ldots (1 + g_{n+k}),$$

tak že vzhledem k nerovnosti (34) máme při $n > m$

$$| (1 + a_1) \ldots (1 + a_n) | \cdot | -1 + (1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \ldots | < \varepsilon.$$

t. j.

$$\left| \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + a_\nu) - \prod_{\nu=1}^{n}(1 + a_\nu) \right| < \varepsilon,$$

a to pro každé x daného intervallu, jak bylo dokázati.

Nekonečný součin $\prod_{1}^{\infty} u_\nu$, jehož členy u_ν závisí na komplexní proměnné x, konverguje v jistém oboru této proměnné stejnoměrně, platí-li nerovnost (32) při každém x tohoto oboru, jakmile $n > m$, kde m značí určité kladné číslo, na x nezávislé.

Jsou-li a_ν hodnoty závislé na x, a platí-li pro všecka x daného oboru nerovnosti (33), soudíme opět, že nekonečný součin $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + a_\nu)$ konverguje v tomto oboru absolutně a stejnoměrně.

Kapitola III.

O funkcích, hlavně jedné proměnné, a zvlášť o elementárných funkcích.

37. Reálné proměnné a funkce.

Hodnoty, vyskytující se v mathematických úvahách, různíme na *stálé* a na *proměnné*; první mají určitou hodnotu, alespoň v úvaze, v níž se vyskytují, druhé nabývají nekonečně mnoho různých hodnot, obyčejně všech hodnot reálných, a slují pak neomezeně proměnné, aneb všech hodnot jistého intervallu $(a \ldots b)$, t. j. hodnot x hovících požadavku $a \leqq x \leqq b$; v obou těchto případech nazýváme x hodnotou *spojitě proměnnou*. Hodnoty stálé značíváme prvními literami abecedy, hodnoty proměnné posledními.

Přísluší-li každé hodnotě proměnné x určitá hodnota y, pravíme, že y jest funkcí proměnné x a píšeme $y = f(x)$; x pak sluje *neodvisle proměnnou* neb *argumentem*, y též *odvisle proměnnou*.

Funkce y jest definována v intervallu $(a \ldots b)$, přísluší-li každému x tohoto intervallu určitá hodnota y.

Pojem funkce takovým způsobem vytčený jest velice obecný, a připouští funkce zcela libovolné, nezajímavé, poněvadž nepodrobené žádné zákonitosti; možno n. p. definovati funkci y v intervallu $(0 \ldots 1)$ tím, že pro racionálná x tohoto intervallu položíme $y = x$, a pro irracionálná $y = \frac{1}{x}$, aneb $y = \frac{1}{x^2}$, a p.

Funkce, jichž studium bylo plodným jak pro ryzí, tak pro applikovanou mathematiku, nebyly sestrojeny takovým libovolným způsobem, nýbrž vyskytly se zcela přirozeně jakožto výrazy utvořené pomocí určitých početních úkonů z hodnoty pro-

měnné a z daných hodnot stálých, jako n. p. funkce racionálné celistvé a lomené, funkce irracionálné a obecnější algebraické, funkce exponenciálná, logarithmická, funkce trigonometrické a pod.

Funkcí racionálnou celistvou, neb stručněji celistvou, rozumíme výraz vznikající z proměnné x a ze stálých konečným počtem úkonů algebraického sčítání a násobení, tedy polynom

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m;$$

zde m značí celistvé kladné číslo, A_0, A_1 . . A_m stálé hodnoty. Funkce taková jest definována v každém intervallu, jakmile jsou dány tyto stálé součinitele č. koefficienty.

Funkcí racionálnou lomenou rozumíme výraz utvořený z proměnné a ze stálých konečným počtem úkonů algebraického sčítání, násobení a dělení, při čemž se mají vyskytovati proměnné dělitele. Výraz takový možno patrně převésti do tvaru podílu dvou polynomů:

$$y = \frac{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m}{B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_n}.$$

a jest funkce taková vytčením koefficientů A_1, . . A_m, B_1 . . B_n definována v každém intervallu neobsahujícím žádné x, které by annullovalo jmenovatel; pro takové x totiž není funkce y definována, poněvadž podíl o nullovém děliteli nemá smyslu. Pro ony hodnoty x nutno funkci y teprve definovati, což se později stane (čl. 100.).

Funkcí algebraickou zoveme hodnotu y závislou na proměnné x takovým způsobem, že tyto dvě hodnoty hoví rovnici tvaru

(1) $$P_0 y^n + P_1 y^{n-1} + \ldots + P_n = 0,$$

kde n jest celistvé kladné číslo, a P_0, P_1, . . P_n polynomy utvořené s proměnnou x.

Má-li tato rovnice speciálně tvar

$$y + P_1 = 0,$$

jest y racionálnou celistvou funkcí, a má-li tvar

$$P_0 y + P_1 = 0,$$

jest y racionálnou lomenou funkcí proměnné x; jsou tedy funkce racionálné speciálnými funkcemi algebraickými. — Týž výrok platí o t. z. funkcích irracionálných, jež totiž vznikají z pro-

měnné x a ze stálých konečným počtem čtyř základných početních úkonů a odmocňováním, vztahujícím se k proměnným odmocněncům, tedy n. p. o funkci

$$y = \frac{a + \sqrt{x+2}}{x - 2\sqrt[3]{x}};$$

v theorii rovnic se totiž učí, že existuje mezi x a y rovnice tvaru (1) a že tedy y jest algebraickou funkcí proměnné x.

Funkce, jež nejsou algebraickými, slují transcendentními; funkce a^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, . . jsou transcendentní, jakož později snadno stvrdíme.

Funkcí *dvou* reálných proměnných x, y nazýváme hodnotu z, je-li tato hodnotami x, y stanovena, při čemž x, y jsou obyčejně buď libovolné neb obsaženy v daných intervallech $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$, aneb jinak omezeny, n. p. požadavkem $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leqq r^2$; v případě prvním jest funkce z dvou neodvisle proměnných definována pro všecky jich hodnoty, v druhém a třetím jen pro jistý *obor*, oněmi nerovnostmi vytknutý. A pod. pro funkci více neodvisle proměnných.

Opět zveme výraz vznikající z proměnných a ze stálých konečným počtem úkonů algebraického sčítání a násobení funkcí racionálnou celistvou, tedy výraz tvaru

$$z = \Sigma A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta,$$

v němž $A_{\alpha\beta}$ jsou hodnoty stálé v konečném počtu, α, β čísla celistvá kladná, včetně nully; podíl dvou takových výrazů sluje racionálnou lomenou funkcí, atd.

Studium vlastností zmíněných speciálných funkcí, i jiných vyvozených z nich způsoby různými, jest hlavním cílem analyse; nežli se za ním dáme, vytkneme některé obecné úvahy o funkcích usnadňující ono studium alespoň potud, že se jimi vyhneme nechutnému opakování.

38. **Horní a dolní mez funkčních hodnot.**

Dle definice funkce $f(x)$ v intervallu $(a \,..\, b)$ jest každá její hodnota číslo konečné; jsou-li všecky hodnoty $f(x)$ číselně menší než určité kladné číslo A, pravíme, že funkce $f(x)$ jest v intervallu $(a \,..\, b)$ konečnou.

Definujeme-li n. p. funkci $f(x)$ v intervallu $(0\ .\ ,\ 1)$ tím, že klademe $f(x) = 0$ pro $x = 0$ a $f(x) = \frac{1}{x}$ pro ostatní hodnoty proměnné x, tedy není $f(x)$ v onom intervallu konečnou, ač má veskrze konečné hodnoty pro všecka x intervallu; funkce ta jest ale konečnou v intervallu $(\alpha\ .\ .\ 1)$, značí-li α libovolné kladné číslo menší jednotky, neboť hodnoty funkční nepřesahují číslo $\frac{1}{\alpha}$.

Jest-li $f(x)$ funkce konečná v intervallu $(a\ .\ .\ b)$, existují dvě čísla L, l, jimž přísluší tyto vlastnosti: $f(x)$ pro kterékoli x intervallu jest menší neb nanejvýš se rovná L, a buď existuje v něm x činící $f(x) = \mathrm{L}$, aneb x takové, že $f(x)$ jest obsaženo mezi L a $\mathrm{L} - \varepsilon$, nechť jest ε jakkoli malé kladné číslo. Obdobně jest $f(x)$ vždy větší neb alespoň rovno l, a dále existuje buď x činící $f(x) = l$ aneb podávající hodnotu $f(x)$ obsaženou mezi l a $l + \varepsilon$, nechť jest ε jakkoli malé kladné číslo.

Číslo L sluje *horní*, číslo l *dolní mezí funkce* $f(x)$ *v intervallu* $(a\ .\ .\ b)$; kladný neb nullový rozdíl $\mathrm{L} - l$ sluje *oscillací funkce v tomto intervallu* (grösste Schwankung).

Dle supposice nepřesáhne $f(x)$ určité celistvé číslo $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ a neklesne pod určité celistvé číslo A; čísla ta mohou ovšem býti i záporná. V řadě celistvých čísel

$$\mathrm{A},\ \mathrm{A} + 1,\ \mathrm{A} + 2,\ .\ .\ \mathrm{A} + \mathrm{B}$$

musí se patrně vyskytnouti číslo α takové, že $f(x)$ nabývá hodnot větších než α, ale žádné hodnoty přesahující $\alpha + 1$, při čemž α může nanejvýše býti $\mathrm{A} + \mathrm{B} - 1$. Dosáhne-li $f(x)$ pro určité x hodnoty $\alpha + 1$, jest $\alpha + 1$ horní mezí L; nestane-li se to, rozdělme intervall $(\alpha\ .\ .\ \alpha + 1)$ třeba na deset stejných dílů, čímž nabýváme deset nových intervallů o krajních hodnotách

$$\alpha,\quad \alpha 1,\quad \alpha{\cdot}2,\ .\ .,\ \alpha{\cdot}9,\ \alpha + 1.$$

Opět jest patrné, že se vyskytne mezi nimi decimálné číslo $\alpha{\cdot}\beta$ takové, že $f(x)$ je přesáhne, ale nikoli číslo $\alpha{\cdot}\beta'$, kde

$$\beta' = \beta + 1$$

jest o 0·1 větší; dosáhne-li $f(x)$ hodnoty $\alpha{\cdot}\beta'$, jest toto číslo horní mezí L, ne-li, rozdělme intervall $(\alpha{\cdot}\beta\ .\ .\ \alpha{\cdot}\beta')$ opět na deset stejných dílů, čímž nabýváme decimálných čísel

$$\alpha{\cdot}\beta,\quad \alpha{\cdot}\beta 1,\quad \alpha{\cdot}\beta 2,\ .\ .\ ,\ \alpha{\cdot}\beta 9,\quad \alpha{\cdot}\beta',$$

a pod. dále. Touto cestou buď dojdeme k horní mezi $L = \alpha{\cdot}\beta\gamma \ldots \mu$, aneb, nemá-li tento postup konce, k nekonečné posloupnosti čísel rostoucích neb alespoň neklesajících a nepřesahujících $A + B$

$$\alpha, \quad \alpha{\cdot}\beta, \quad \alpha{\cdot}\beta\gamma, \quad \alpha{\cdot}\beta\gamma\delta, \ldots$$

a stanovících tedy určité číslo L. Dle jeho vzniku víme, že $f(x)$ nabývá hodnot mezi čísly

$$\alpha{\cdot}\beta\gamma \ldots \mu \quad \text{a} \quad \alpha{\cdot}\beta\gamma \ldots \mu', \quad \mu' = \mu + 1,$$

položených, tedy hodnot odchylujících se od L o libovolně málo, a jest tedy L horní mezí hodnot $f(x)$.

Obdobně vychází existence dolní meze l.

Vzhledem k $l \leqq f(x) \leqq L$ a vzhledem k okolnosti, že rozdíly $L - f(x)$ a $f(x) - l$ se stávají libovolně malými, soudíme, že oscillace funkce $L - l$ jest horní mezí hodnot $| f(x) - f(x') |$, značí-li x, x' dvě hodnoty intervallu $(a \ldots b)$.

N. p. funkce $f(x)$ definovaná v intervallu $(0 \ldots 1)$ tak, že $f(x) = x$ vyjma pro $x = 1$, a že $f(1) = 0$, má 1 za horní mez; meze té funkce patrně nedosáhne. Dolní mez jest 0, a meze té $f(x)$ dosáhne při $x = 0$.

39. **Spojité funkce.**

Funkce $f(x)$, definovaná v intervallu $(a \ldots b)$, *sluje spojitou pro hodnotu x tohoto intervallu*, přísluší-li každému kladnému číslu ε kladné číslo η takové, že platí nerovnost

$$| f(x') - f(x) | < \varepsilon$$

pro všecka x' intervallu lišící se od x o méně, než η, t. j. hovící požadavku $| x' - x | < \eta$.

Jest-li x různé od a i b, možno spojitost funkce pro hodnotu x vyjádřiti tak, že k libovolnému kladnému ε musí existovati kladné η takové, že

$$| f(x + \vartheta\eta) - f(x) | < \varepsilon$$

pro všechna ϑ obsažená mezi -1 a $+1$; je-li ale $x = a$, musí tato nerovnost platiti pro všecka ϑ mezi 0 a $+1$, a je-li $x = b$, pro všecka ϑ mezi -1 a 0.

Jakožto příklad vytkněme si funkci $f(x)$ rovnající se $\frac{1}{x}$ při $x \gtrless 0$, a libovolně zvolené hodnotě A při $x = 0$. Funkce ta

jest spojitá pro každé $x \gtrless 0$ a nespojitá pro $x = 0$. Máme totiž při $x \gtrless 0$, $x' \gtrless 0$

$$f(x') - f(x) = \frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{x - x'}{xx'},$$

a hodnota ta se stává číselně libovolně malou pro dosti malé $| x - x' |$, kdežto rozdíl

$$f(x) - f(0) = \frac{1}{x'} - A$$

pro hodnoty x', hovící požadavku $| x' - 0 | < \eta$ se stává číselně libovolně velkou hodnotou, nechť jest kladné η jakkoli voleno.

Funkce $f(x)$ sluje spojitou v intervallu $(a \ldots b)$, aneb též stejnoměrně spojitou v tomto intervallu, jestliže k libovolnému kladnému číslu ε možno přiřaditi kladné číslo η takové, že platí nerovnost

$$| f(x') - f(x) | < \varepsilon$$

pro každé dvě hodnoty x, x' intervallu, hovící výminee

$$| x' - x | < \eta.$$

Funkce spojitá v intervallu $(a \ldots b)$ jest nutně konečná v tomto intervallu; rozdělíme-li totiž intervall na n intervallů, z nichž každý jest menší než η, bude absolutní hodnota funkce v prvním intervallu menší než $| f(a) | + \varepsilon$, v druhém menší než $| f(a) | + 2\varepsilon$, atd., v posledním menší než $| f(a) | + n\varepsilon$.

Jest-li $f(x)$ funkcí spojitou v intervallu $(a \ldots b)$, možno rozděliti tento intervall na konečný počet intervallů, v nichž každém oscillace funkce nepřesáhne libovolně malé kladné číslo ε; stačí vzíti intervally menší než η. — A naopak, možno-li to učiniti, jest funkce spojitá v intervallu $(a \ldots b)$; neboť stanovíme-li při daném ε intervally tak, aby oscillace v každém byla menší než $\frac{1}{2}\varepsilon$, a označíme-li η rozsah nejmenšího intervallu, jsou při $| x' - x | < \eta$ hodnoty x, x' buď v témž intervallu, a pak jest $| f(x') - f(x) | < \frac{1}{2}\varepsilon$, aneb jsou ve dvou sousedních intervallech a pak, značí-li x'' hodnotu oběma společnou, bude

$$| f(x') - f(x) | = | f(x') - f(x'') + f(x'') - f(x) | < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

a tedy platí v každém případě

$$| f(x') - f(x) | < \varepsilon \text{ při } | x' - x | < \eta,$$

jak bylo dokázati.

40. Pokračování.

Funkce $f(x)$ spojitá v intervallu $(a \ldots b)$ jest patrně spojitá pro každou hodnotu x tohoto intervallu, neboť pak i pro pevné x platí $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ při $|x' - x| < \eta$; ale i opáčný výrok jest správný, t. j. *funkce $f(x)$ definovaná v intervallu $(a \ldots b)$ a spojitá pro každou hodnotu jeho, jest spojitá v tomto intervallu* *).

Abychom to dokázali, předpokládejme, že věta není správná; že tedy nemožno rozděliti intervall $(a \ldots b)$ na konečný počet intervallů takových, aby oscillace funkce v každém z nich byla menší než libovolně malé kladné číslo ε.

Rozdělme intervall $(a \ldots b)$ na několik intervallů, třeba na dva stejné, tak že krajní jich hodnoty budou

$$a, \quad a + \frac{b-a}{2}, \quad b;$$

pak alespoň v jednom z těchto dvou intervallů bude oscillace funkce $\geqq \varepsilon$. Značíme-li $a_1, b_1 > a_1$ krajní hodnoty tohoto intervallu, obdržíme jeho rozpůlením krajní hodnoty

$$a_1, \quad a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}, \quad b_1$$

dvou nových intervallů, a alespoň v jednom z nich bude oscillace funkce $\geqq \varepsilon$; označme $a_2, b_2 > a_2$ krajní hodnoty tohoto intervallu, atd. Tím obdržíme dvě nekonečné posloupnosti čísel

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots), \quad (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

takové, že v první členy nikdy neklesají, v druhé nikdy nestoupají, nepřesahujíce číslo b; jsou tedy obě posloupnosti konvergující (čl. 13.), a vzhledem k tomu, že rozdíl $b_n - a_n$ pro dosti velké n jest libovolně malý, konvergují k témuž číslu c intervallu $(a \ldots b)$. Ze vzniku těchto posloupností vychází, že v každém intervallu $(a_n \ldots b_n)$ jest oscillace dané funkce $\geqq \varepsilon$.

Dle supposice jest ale $f(x)$ pro $x = c$ spojitá, a tedy přísluší libovolnému kladnému ε' kladné η takové, že platí

$$|f(c+h) - f(c)| < \varepsilon' \text{ při } |h| < \eta.$$

---

*) Větu tuto připisuje *Heine* ve svém pojednání „Die Elemente der Functionenlehre", Crelle-ův žurnál, sv. 74., str. 182, *G. Cantorovi*. Tamže na str. 221. *Schwarz* podotýká, že věta plyne snadno pomocí úvah pochodících od *Bolzana* a *Weierstrassem* dále vypěstovaných. Hořejší důkaz podal *Darboux* s tím podotknutím, že jeho lze užiti také při funkcích více proměnných; v. „Mémoire sur les fonctions discontinues", Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, 2e série, t. IV, p. 73.

Volíme-li n tak velké, aby a_n i b_n byla obsažena mezi $c - \eta$ a $c + \eta$, platí nerovnost

$$| f(x') - f(c) | < \varepsilon'$$

pro všecka x intervallu $(a_n \ldots b_n)$. Značí-li tedy x, x' dvě libovolné hodnoty tohoto intervallu, máme

$$| f(x') - f(x) | = | f(x') - f(c) + f(c) - f(x) | < \varepsilon' + \varepsilon',$$

tedy jest oscillace funkce $f(x)$ v tomto intervallu $\leqq 2\varepsilon'$, t. j. oscillace jest $< \varepsilon$, volíme-li $2\varepsilon' < \varepsilon$. To ale odporuje hořejšímu výsledku, že oscillace ta jest $\geqq \varepsilon$, čímž nemožnost praemissy, a tedy správnost věty dokázána.

Funkce spojitá v každém bodě intervallu $(a \ldots b)$ *jest nutně konečná v tomto intervallu*; ona jest dle věty právě dokázané spojitou v tomto intervallu a tedy jest v něm také konečnou (článek 29.).

41. Spojitost součtu, součinu, podílu dvou funkcí; spojitost funkce.

Jsou-li $f(x)$ a $\varphi(x)$ *dvě funkce spojité v intervallu* $(a \ldots b)$, *jsou také součet* $f(x) + \varphi(x)$ *a součin* $f(x) \cdot \varphi(x)$ *dvě funkce spojité v tomto intervallu; a totéž platí o podílu* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *není-li dolní mez hodnot* $| \varphi(x) |$ *nulla, jest-li tedy číslem kladným.*

Dle supposice možno při libovolném kladném ε stanoviti kladné η tak, aby pro každé hodnoty x, x' intervallu hovící $| x' - x | < \eta$ platily nerovnosti

$$| f(x') - f(x) | < \varepsilon, \quad | \varphi(x') - \varphi(x) | < \varepsilon;$$

z toho plyne

$$| f(x') + \varphi(x') - f(x) - \varphi(x) | < \varepsilon + \varepsilon,$$

čímž první výrok dokázán. Patrně možno obecněji říci, že součet libovolného počtu — však konečného — spojitých fukcí jest též spojitou funkcí.

Dále máme

$$f(x') = f(x) + \vartheta\varepsilon, \quad \varphi(x') = \varphi(x) + \vartheta'\varepsilon,$$

kde ϑ, ϑ' jsou hodnoty mezí -1 a $+1$, a tedy

$$f(x')\,\varphi(x') - f(x)\,\varphi(x) = \vartheta\varepsilon\varphi(x) + \vartheta'\varepsilon f(x) + \vartheta\vartheta'\varepsilon^2,$$
$$| f(x')\,\varphi(x') - f(x)\,\varphi(x) | < \varepsilon(A + B) + \varepsilon^2,$$

platí-li v celém intervallu $|f(x)| < A$, $|\varphi(x)| < B$. Jest tedy levá strana při $|x' - x| < \eta$ menší než libovolné kladné ε', volíme-li ε tak, aby $\varepsilon(A + B + \varepsilon) \leqq \varepsilon'$, k čemuž při $\varepsilon < 1$ stačí vzíti

$$\varepsilon \leqq \frac{\varepsilon'}{A + B + 1}.$$

Tím dokázán výrok druhý.

Vzhledem k

$$\frac{f(x')}{\varphi(x')} - \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) + \vartheta\varepsilon}{\varphi(x) + \vartheta'\varepsilon} - \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\vartheta\varepsilon\varphi(x) - \vartheta'\varepsilon f(x)}{\varphi(x)[\varphi(x) + \vartheta'\varepsilon]}$$

máme

$$\left| \frac{f(x')}{\varphi(x')} - \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < \frac{\varepsilon(A + B)}{C(C - \varepsilon)},$$

je-li C taková kladná hodnota, že v daném intervallu platí

$$|\varphi(x)| > C.$$

Levá strana jest tedy menší než libovolné kladné ε', volíme-li ε tak, aby

$$\frac{\varepsilon(A + B)}{C(C - \varepsilon)} \leqq \varepsilon',$$

k čemuž při $\varepsilon < \frac{1}{2}C$ stačí, aby

$$\frac{\varepsilon(A + B)}{C\left(C - \frac{C}{2}\right)} \leqq \varepsilon', \text{ t. j. } \varepsilon \leqq \frac{\varepsilon' C^2}{2(A + B)},$$

čímž dokázán výrok třetí.

Jest-li $y = f(x)$ funkce spojitá pro hodnotu x_0, a $z = \varphi(y)$ funkce proměnné y spojitá pro hodnotu $y_0 = f(x_0)$, jest

$$z = \varphi(f(x)) = \psi(x)$$

funkce spojitá pro hodnotu x_0.

Dle supposice jest

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon \text{ při } |y - y_0| < \eta,$$

a

$|f(x) - f(x_0)| < \eta$, t. j. $|y - y_0| < \eta$ při $|x - x_0| < \eta'$,

a tedy platí první nerovnost, t. j.

$$|\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon \text{ při } |x - x_0| < \eta'.$$

42. Další vlastnosti spojitých funkcí.

Jest-li $f(x)$ funkce spojitá pro hodnotu x_0 a jest-li $f(x_0)$ hodnota různá od nully, jest $f(x_0 + h)$ téhož znamení, jako $f(x_0)$ pro dosti malé $| h |$.

Budiž $f(x_0) = \alpha$. Ze supponované spojitosti plyne, že existuje kladné číslo η takové, že platí

$$| f(x_0 + h) - f(x_0) | < | \alpha |$$

pro všecka h hovící nerovnosti $| h | < \eta$; pročež pak

$$f(x_0 + h) = f(x_0) \pm \vartheta | \alpha |, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

a jest tedy $f(x_0 + h)$ hodnota téhož označení jako $f(x_0)$ pro každé h hovící $| h | < \eta$.

*Jest-li $f(x)$ funkce spojitá v intervallu $(a \ldots b)$ a jest-li z hodnot $f(a)$, $f(b)$ jedna kladná a jedna záporná. existuje v tomto intervallu alespoň jedno číslo x, které činí $f(x) = 0$**).

Budiž $f(a) = \alpha$ třeba číslo kladné a $f(b) = \beta$ číslo záporné, $a < b$. Dle předchozí věty existuje kladné číslo η takové, že pro kladné $h < \eta$ platí $f(a + h) > 0$. Volme kladné $h_1 < \eta$; pak jest $f(x) > 0$ pro všecky hodnoty x intervallu $(a \ldots a + h_1)$, a položme $f(a + h_1) = \alpha_1$, kde tedy $\alpha_1 > 0$.

Opět vychází z předchozí věty existence kladného čísla η_1 takového, že při $| k | < \eta_1$ platí $f(a + h_1 + k) > 0$. Volme kladné $k_1 < \eta_1$; pak jest $f(x) > 0$ pro všecky hodnoty x intervallu $(a \ldots a + h_1 + k_1)$, atd.

Čísla a, $a + h_1$, $a + h_1 + k_1$, .. stále rostou, ale jsou všecka menší než b, poněvadž $f(b) < 0$; mají tedy horní mez L mezi a a b položenou, a ta musí činiti $f(\mathrm{L}) = 0$. Kdyby totiž $f(\mathrm{L}) > 0$, platilo by, dle předchozí věty, $f(\mathrm{L} + \varepsilon) > 0$ pro dosti malé kladné ε, a tedy by hodnota L nebyla horní mezí oněch hodnot, a kdyby $f(\mathrm{L}) < 0$ platila by pro dosti malé kladné ε nerovnost $f(\mathrm{L} - \varepsilon) < 0$, což by opět ukazovalo, že L není horní mezí oněch hodnot.

Z věty právě dokázané ihned vychází, *že funkce $f(a)$ spojitá v intervallu $(a \ldots b)$ nabývá v něm všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$ položených*; t. j. značí-li C číslo mezi $f(a)$ a $f(b)$, tu existuje alespoň jedna hodnota x v intervallu, která činí $f(x) = \mathrm{C}$.

---

*) *Bolzano*, l. c. str. 21. seqq., *Cauchy*, l. c., Note III.

Stačí poznamenati, že $f(x) - C$ jest funkcí spojitou v našem intervallu (čl. 41.) a že má pro $x = a$, $x = b$, resp. hodnoty $f(a) - C$, $f(b) - C$ různě označené; vymizí tedy pro jisté x intervallu, t. j. pro ně platí $f(x) = C$.

Stručně možno říci, že spojitá funkce nemůže přejíti od jedné hodnoty k jiné, aniž by nenabyla všech hodnot mezi nimi se nalézajících.

Další věta o spojitých funkcích, *Weierstrassem* vytknutá, jest tato:

Jest-li $f(x)$ funkce spojitá v intervallu $(a \ldots b)$, a jsou-li L, *l horní a dolní mez její v tomto intervallu, tu existují v něm dvě čísla* X, *x činící*

$$f(X) = L, \quad f(x) = l,$$

t. j. spojitá funkce má v tomto intervallu *největší a nejmenší hodnoty* (maximální a minimální), č. dostihne své horní a dolní meze.

Rozdělme intervall na libovolný počet n_1 stejných intervallů; pak alespoň v jednom bude horní mez táž jako v celém intervallu, totiž L; budiž x_1 první hodnota tohoto intervallu, a tedy $x'_1 = x_1 + \frac{b-a}{n_1}$ poslední. Tento menší intervall rozdělme na libovolný počet n_2 stejných dílů, i bude pak opět alespoň v jednom z těchto menších intervallů L horní mezí funkce; první hodnota takového intervallu budiž x_2 a poslední tedy $x'_2 = x_2 + \frac{b-a}{n_1 n_2}$. Intervall tento rozdělme na n_3 stejné intervally, atd. Tím obdržíme posloupnost čísel nikdy neklesajících $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a nepřesahujících b, stanovící tedy jisté číslo x_0 intervallu; o něm možno ukázati, že činí $f(x_0) = L$.

Kdyby totiž $f(x_0) < L$, t. j. $L - f(x_0) > \varepsilon$, kde ε jest určité kladné číslo, tu by funkce $f(x)$, mající v intervallu $(x_n \ldots x_0)$ horní mez L, měla v tomto intervallu oscillaci větší než ε, což jest proti supposici o spojitosti funkce; volíme-li n dosti velké, jest poslední intervall libovolně malý a tedy také oscillace funkce v něm libovolně malá (čl. 39.).

Obdobně možno dokázati existenci nejmenší hodnoty funkce v intervallu. t. j. dokázati, že existuje v intervallu x činící $f(x) = l$.

43. Pojem limity při spojité proměnné.

Značí-li $f(x)$ funkci definovanou v intervallu $(a \,..\, b)$ a spojitou pro hodnotu x tohoto intervallu, a *jest-li*

(2) $$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

konvergující posloupnost z hodnot intervallu, mající za limitu x, tu konverguje posloupnost

(3) $$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots$$

k hodnotě $f(x)$.

Dle supposice o spojitosti platí pro libovolné kladné ε

$$|\, f(x_n) - f(x) \,| < \varepsilon \quad \text{při} \quad |\, x_n - x \,| < \eta,$$

kde η značí určité kladné číslo, závislé na ε. Avšak dle supposice o první posloupnosti máme pro libovolné kladné η

$$|\, x_n - x \,| < \eta \quad \text{při} \quad n > p,$$

kde p značí určité kladné číslo, závislé na η; máme tedy

$$|\, f(x_n) - f(x) \,| < \varepsilon \quad \text{při} \quad n > p,$$

jak bylo dokázati.

A naopak: *má-li posloupnost* (3) *za limitu $f(x)$, nechť jest* (2) *jakákoli posloupnost z hodnot intervallu utvořená a konvergující k x, tu jest $f(x)$ spojitá pro hodnotu x.* V opáčném případě by totiž existovalo kladné číslo ε takové, že při libovolně malém kladném η se nalezne x' hovící nerovnosti $|\, x - x' \,| < \eta$ a činící

$$|\, f(x) - f(x') \,| > \varepsilon.$$

Volme posloupnost kladných čísel

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \ldots$$

tak, aby konvergovala k 0, a vytkněme příslušná čísla x', jež označme

(4) $$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ \ldots,$$

a jež jsou tedy taková, že pro všecka platí

(5) $$|\, f(x) - f(x'_n) \,| > \varepsilon;$$

vzhledem k $|\, x - x'_n \,| < \eta_n$ má posloupnost (4) za limitu x, a vzhledem k (5) by posloupnost

$$f(x'_1),\ f(x'_2),\ f(x'_3),\ \ldots$$

neměla $f(x)$ za limitu, což by bylo proti supposici.

Z této věty jest patrno, že funkce spojitá jest známa v intervallu $(a \ldots b)$, jsou-li známy její hodnoty n. p. pro všecka racionálná x tohoto intervallu; neboť každé irracionálné x možno stanoviti konvergující posloupností $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o racionálných členech, a $f(x)$ jest pak limita hodnot $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$

Při spojité proměnné x se obyčejně neuvažují pouze posloupnosti různých hodnot této proměnné, nýbrž všecky hodnoty její, jistými mezemi sevřené; tím vzniká jiný pojem limity.

Pravíme totiž, že funkce $f(x)$, definovaná v intervallu $(a \ldots b)$, má limitu M pro případ, že se proměnná x blíží hodnotě x' tohoto intervallu, přísluší-li každému kladnému ε kladná hodnota η taková, že platí

$$| f(x) - M | < \varepsilon$$

pro všecka x intervallu, hovící nerovnosti $| x - x' | < \eta$.

Pak ovšem musí $| f(x') - M |$ býti menší než každé kladné číslo ε, jelikož $| x' - x' = 0$ jest menší než každé kladné η, t. j. pak musí nutně

$$f(x') = M$$

a funkce $f(x)$ musí býti spojitá pro hodnotu x'.

Jinak se věci mají, uvažujeme-li při limitování všecky hodnoty x intervallu, vyjma x'; t. j. vyjadřujeme-li výrokem, že se $f(x)$ blíží limitě M, po případě kdy x se blíží hodnotě x', to faktum, že pro libovolné kladné ε existuje kladné η takové, že platí nerovnost

$$| f(x) - M | < \varepsilon$$

pro všecka x intervallu *různá od* x' a hovící nerovnosti $| x - x' | < \eta$. V tomto případě nemusí $f(x')$ se rovnati M, ale ovšem se mu rovná, jest-li $f(x)$ funkce spojitá pro hodnotu x'.

Obdobně pravíme o funkci $f(x)$, definované v každém intervallu $(a \ldots b)$, nechť jest b jakkoli velké kladné číslo, že $\lim f(x) = M$ pro případ, že x roste do nekonečna č. že $\lim x = \infty$, přísluší-li každému kladnému ε číslo kladné H takové, že platí

$$| f(x) - M | < \varepsilon \quad \text{při} \quad x > H.$$

Dále, že $\lim f(x) = \infty$ pro případ, kdy x se blíží určité hodnotě x', přísluší-li každému kladnému E kladné číslo η takové, že

$$f(x) > E \quad \text{při} \quad | x - x' | < \eta;$$

a že $\lim f(x) = \infty$ pro $\lim x = \infty$, přísluší-li libovolnému kladnému číslu E kladné číslo H takové, že

$$f(x) > \mathrm{E} \quad \text{při} \quad x > \mathrm{H},$$

konečně, že $\lim f(x) = -\infty$ pro $\lim x = x'$, je-li $\lim -f(x) = \infty$, a pod.

Případy právě vytknuté stručně tím charakterisujeme, že pravíme: funkce $f(x)$ jest ∞ pro hodnotu x', resp. jest ∞ pro $x = \infty$, resp. jest $-\infty$ pro hodnotu x', a pod.

Věty o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí v čl. 18. vytčené platí patrně i pro případ spojité proměnné.

Racionálná celistvá funkce

$$f(x) = \mathrm{A}_0 x^m + \mathrm{A}_1 x^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_m$$

pro $\lim x = \infty$ má za limitu $\pm\infty$ souhlasně s $\mathrm{A}_0 \gtrless 0$. Máme totiž

$$f(x) = \mathrm{A}_0 x^m \left(1 + \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_0}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_m}{\mathrm{A}_0}\frac{1}{x^m}\right),$$

a tedy

$$\lim f(x) = \mathrm{A}_0 \lim x^m = \pm\infty.$$

Racionálná lomená funkce neryzí

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}_0 x^m + \mathrm{A}_1 x^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_m}{\mathrm{B}_0 x^m + \mathrm{B}_1 x^{m-1} + \ldots + \mathrm{B}_m},$$

jejíž čítatel a jmenovatel jsou téhož stupně, má při $\lim x = \pm\infty$ za limitu $\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{B}_0}$; stačí ji psáti ve tvaru

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}_0 + \frac{\mathrm{A}_1}{x} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_m}{x^m}}{\mathrm{B}_0 + \frac{\mathrm{B}_1}{x} + \ldots + \frac{\mathrm{B}_m}{x^m}},$$

aby věc byla patrna.

Ryze lomená racionálná funkce

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}_0 x^m + \mathrm{A}_1 x^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_m}{\mathrm{B}_0 x^n + \mathrm{B}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathrm{B}_n}, \quad n > m,$$

t. j. taková, u níž jmenovatel jest vyššího stupně než čítatel, má 0 za limitu, roste-li x do $+\infty$, aneb klesá-li do $-\infty$; pí-

šeme-li ji totiž ve tvaru

$$f(x) = \frac{\frac{A_0}{x^{n-m}} + \frac{A_1}{x^{n-m+1}} + .. + \frac{A_m}{x^n}}{B_0 + \frac{B_1}{x} + .. + \frac{B_n}{x^n}},$$

vidíme, že limita čítatele jest 0, limita jmenovatele B_0, a tedy $\lim f(x) = 0$.

Neryze lomená funkce $f(x)$, při níž tedy $m \geqq n$, se v případu $m > n$ může divisí převésti do tvaru

$$f(x) = \frac{A_0}{B_0} x^{m-n} + C_1 x^{m-n-1} + .. + C_{m-n} + \varphi(x),$$

kde $\varphi(x)$ značí funkci ryze lomenou, a pak vidíme, že

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = \lim \left(\frac{A_0}{B_0} x^{m-n} + .. + C_{m-n} \right),$$

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = \pm \infty \text{ souhlasně s } \frac{A_0}{B_0} \gtrless 0.$$

Mějme jakožto další příklad

$$f(x) = \sqrt{x+\alpha} - \sqrt{x},$$

kde α značí kladnou hodnotu, a stanovme $\lim f(x)$ pro $\lim x = \infty$.

Píšeme-li

$$f(x) = \frac{x + \alpha - x}{\sqrt{x+\alpha} + \sqrt{x}} = \frac{\alpha}{\sqrt{x+\alpha} + \sqrt{x}},$$

máme ihned

$$\lim f(x) = 0 \quad \text{pro} \quad \lim x = \infty.$$

Skutečně, aby

$$\frac{\alpha}{\sqrt{x+\alpha} + \sqrt{x}} < \varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad \frac{\alpha}{\varepsilon} < \sqrt{x+\alpha} + \sqrt{x},$$

stačí, aby platila nerovnost

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} < 2\sqrt{x}, \quad \text{t. j.} \quad x > \frac{\alpha^2}{4\varepsilon^2}.$$

44. Inversní funkce.

Funkci $f(x)$, definovanou v intervallu $(a \,..\, b)$, nazýváme *stoupající*, jestliže pro každé dvě hodnoty x, x' intervallu rozdíl

$f(x) - f(x')$ jest téhož znamení jako rozdíl $x - x'$, nikdy však nullou; a *klesající*, jsou-li oba rozdíly vždy různých znamení.

Jest-li $f(x)$ funkce stoupající v intervallu $(a \,..\, b)$, jest její dolní mez $f(a)$ a horní $f(b)$.

Jest-li $f(x)$ *v intervallu* $(a \,..\, b)$ *spojitá a stoupající funkce, pak rovnice*

$$f(x) = X$$

definuje x *jakožto funkci proměnné* X *v intervallu* (A . . B), *značí-li* A, B *hodnoty* $f(a)$, $f(b)$; *funkce ta, jež sluje inversní funkcí k* $f(x)$, *jest v intervallu* (A . . B) *též spojitá a stoupající.*

Věta platí též, mutatis mutandis, o spojité a klesající funkci.

Dle čl. 42. existuje ku každému X, mezi $f(a)$ a $f(b)$ položenému, hodnota x v intervallu $(a \,..\, b)$ činící $f(x) = X$; a že taková hodnota x jest jediná, vychází ze supposice o stoupání, dle níž při $x' > x$ také $f(x') > f(x)$. Tím jest tedy x definováno v intervallu (A . . B) jakožto funkce $\varphi(X)$ proměnné X.

Funkce $\varphi(X)$ jest stoupající, neboť máme-li

$$f(x) = X, \quad f(x') = X',$$

čili

$$x = \varphi(X), \quad x' = \varphi(X'),$$

jest dle supposice podíl

$$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$$

vždy kladný; podíl ten ale možno psáti

$$\frac{X - X'}{\varphi(X) - \varphi(X')},$$

a jsou tudíž rozdíly v čítateli a jmenovateli téhož znamení.

Funkce $\varphi(X)$ jest ale též spojitá v intervallu (A . . B). Značí-li totiž ε kladné číslo menší než $b - a$, a nabývá-li x všech hodnot od a do $b - \varepsilon$, tu jest rozdíl

$$f(x + \varepsilon) - f(x)$$

spojitou a kladnou funkcí, a to dle čl. 41. a vzhledem k okolnosti, že $f(x)$ jest funkcí stoupající; funkce ta má tedy dolní mez $\eta \geqq 0$. Avšak η nemůže býti 0, neboť spojitá funkce své meze dosahuje, a tedy by existovalo x činící

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = 0 \quad \text{čili} \quad f(x + \varepsilon) = f(x),$$

věc to nemožná; jest tedy $\eta > 0$.

Značí-li nyní x, x' dvě libovolné hodnoty intervallu $(a \,..\, b)$ takové, že $x' - x > \varepsilon$, jest vzhledem k

$$f(x') > f(x + \varepsilon)$$

též

$$f(x') - f(x) > f(x + \varepsilon) - f(x),$$

a tedy i

$$f(x') - f(x) > \eta.$$

Platí-li tedy pro dvě hodnoty x, x' intervallu $(a \,..\, b)$ nerovnost

$$| f(x') - f(x) | < \eta,$$

musí nutně

$$| x' - x | \leqq \varepsilon,$$

t. j. při

$$| X' - X | < \eta \quad \text{jest} \quad | \varphi(X') - \varphi(X) | \leqq \varepsilon,$$

čímž dokázána spojitost funkce $\varphi(X)$ v intervallu $(A \,..\, B)$.

45. **Spojitost nekonečných řad, zvlášť mocninných.**

Konverguje-li řada, jejíž členy jsou spojité funkce proměnné x v intervallu $(a \,..\, b)$, stejnoměrně v tomto intervallu, jest součet její spojitou funkcí proměnné x v intervallu $(a \,..\, b)$.

Budiž

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \,..$$

daná řada, o členech $\varphi_\nu(x)$ spojitých v intervallu $(a \,..\, b)$, a supponujme, že řada v tomto intervallu konverguje stejnoměrně; součet její označme $F(x)$.

Volme libovolně kladnou hodnotu ε; pak můžeme vytknouti index n takový, že zbytek $R_n(x)$ řady pro každé x intervallu jest číselně menší než $\frac{\varepsilon}{3}$.

Položíme-li

$$S_n(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \,.. + \varphi_{n-1}(x),$$

jest

$$F(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Dle čl. 41. jest $S_n(x)$ funkce spojitá, a tedy existuje kladné η takové, že

$$| S_n(x) - S_n(x') | < \frac{\varepsilon}{3}$$

pro všecka x, x' intervallu hovící nerovnosti $|x - x'| < \eta$. Máme tedy za této supposice

$$|F(x) - F(x')| = |S_n(x) - S_n(x') + R_n(x) - R_n(x')|$$

$$\leqq |S_n(x) - S_n(x')| + |R_n(x)| + |R_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},$$

z čehož patrno, že $F(x)$ jest funkce spojitá v intervallu $(a \ldots b)$.

Racionálná celistvá funkce jest spojitá v každém intervallu. — Vezměme nejprve v úvahu pouhou mocninu

$$f(x) = x^m,$$

kde m značí celistvé kladné číslo; zde

$$f(x + h) - f(x) = (x + h)^m - x^m,$$

a rozvineme-li dle binomické věty,

$$f(x + h) - f(x) = h\left(mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2}h + \ldots + h^{m-1}\right).$$

Značí-li c kladné číslo větší než $|x|$ a také větší než $|h|$, jest patrně

$$|f(x+h) \quad f(x)| < |h| \left(mc^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} c^{m-1} + \ldots + c^{m-1}\right),$$

$$|f(x+h) - f(x)| < (2^m - 1)\, c^{m-1} |h|.$$

Platí tedy při libovolném kladném ε nerovnost

$$|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon,$$

volíme-li

$$|h| \leqq \frac{\varepsilon}{(2^m - 1)\, c^m};$$

jest tedy x^m spojitou funkcí pro každé x, a tedy i v každém intervallu.

Každá racionálná celistvá funkce jest součtem funkcí tvaru Ax^m, a tedy sama spojitá (čl. 41.).

Racionálná lomená funkce jest spojitá v každém intervallu, neobsahujícím žádnou z hodnot x, které annullují jmenovatel (žádný kořen jeho); jest totiž podílem dvou spojitých funkcí, a jmenovatel pro žádnou hodnotu intervallu nevymizí (čl. 41.).

Mocninná řada

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

o konvergenčním poloměru R *jest spojitá funkce proměnné x v každém intervallu* $(a \ldots b)$, *obsaženém uvnitř intervallu* $(-R \ldots +R)$.

Dle čl. 32. konverguje řada v intervallu $(a \,..\, b)$ stejnoměrně; členy její jsou spojité funkce v něm, a tedy jest i její součet spojitou funkcí proměnné x v tomto intervallu.

Mimo větu uvedenou v čl. 31. sluší na tomto místě uvésti ještě jinou větu *Abelovu**) o řadách mocninných; důkaz její se opírá o tuto pomocnou úvahu.

Jsou-li $v_1, v_2, \,..\, v_n$ libovolné kladné neb záporné hodnoty v počtu n, a jest-li a hodnota menší než nejmenší ze součtů

$$s_1 = v_1,\ s_2 = v_1 + v_2,\ ..,\ s_n = v_1 + v_2 + \,..\, + v_n,$$

A pak hodnota větší než největší z těchto součtů, a jsou-li konečně $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \,..\, > \varepsilon_n$ kladné, klesající hodnoty, platí nerovnosti

$$\varepsilon_1 a < \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \,..\, + \varepsilon_n v_n < \varepsilon_1 \mathrm{A}.$$

Součet uprostřed nerovností možno totiž napsati ve tvaru

$$\varepsilon_1 s_1 + \varepsilon_2 (s_2 - s_1) + \,..\, + \varepsilon_n (s_n - s_{n-1})$$
$$= s_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + s_3 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \,..\, + s_{n-1} (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + s_n \varepsilon_n.$$

Poněvadž součinitele $\varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ ..,\ \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n,\ \varepsilon_n$ jsou vesměs kladné, tedy součet ten zmenšíme resp. zvětšíme, nahradíme-li hodnoty $s_1, s_2, \,..\, s_n$ hodnotou a resp. A, čímž hořejší nerovnosti vycházejí. Je-li tedy K kladné číslo, větší než největší z čísel $|\, s_1 \,|, |\, s_2 \,|, \,..\, |\, s_n \,|$ a tudíž $-$ K menší než nejmenší z čísel $s_1, s_2, \,..\, s_n$, možno vzíti $a = -\mathrm{K}$, $\mathrm{A} = \mathrm{K}$, čímž

$$-\varepsilon_1 \mathrm{K} < \varepsilon_1 v_1 + \,..\, + \varepsilon_n v_n < \varepsilon_1 \mathrm{K}$$

aneb

$$|\, \varepsilon_1 v_1 + \,..\, + \varepsilon_n v_n \,| < \varepsilon_1 \mathrm{K}.$$

Nyní snadno plyne druhá věta Abelova:

Konverguje-li mocninná řada

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \,..\, \tag{6}$$

pro $x = a$, *a tedy také při* $|\, x \,| < |\, a \,|$, *tu jest limita součtu řady* (6) *pro lim* $x = a$, *při čemž* x *nabývá ovšem jen hodnot číselně menších než* a, *součet řady*

$$u_0 + u_1 a + u_2 a^2 + \,..\, \tag{7}$$

Značí-li α, β dvě hodnoty číselně menší než a, víme (čl. 32.), že řada (6) konverguje v intervallu $(\alpha \,..\, \beta)$ stejnoměrně a abso-

*) *Abel*, Oeuvres complètes, t. I, pag. 223. Sr. též *J. Tannery*, Introd. à la Théorie des fonctions d'une variable, pag. 170.

lutně; avšak možno dokázati, že řada (6) konverguje stejnoměrně i v intervallu, jehož jednou krajní hodnotou jest samo číslo a, druhou libovolná hodnota číselně menší než a. Patrně stačí dokázati stejnoměrnou konvergencí řady (6) v intervallu $(0 \ldots a)$ při kladném a, aneb v intervallu $(a \ldots 0)$ při záporném a.

Za tím cílem budiž ε libovolné kladné číslo; z konvergence řady (7) soudíme, že existuje kladné celistvé p takové, že při $n > p$ každý ze součtů

$$\begin{aligned} s_1 &= u_n a^n, \\ s_2 &= u_n a^n + u_{n+1} a^{n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{\nu+1} &= u_n a^n + u_{n+1} a^{n+1} + \ldots + u_{n+\nu} a^{n+\nu} \end{aligned}$$

jest číselně menší než ε, nechť jest ν jakékoli.

Značí-li x libovolné číslo intervallu $(0 \ldots a)$, jsou hodnoty

$$\frac{x^n}{a^n}, \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}}, \ldots, \frac{x^{n+\nu}}{a^{n+\nu}}$$

vesměs kladné (neb 0), klesající (neb stejné), menší (neb rovnající se) 1; béřeme-li je za hodnoty $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\nu+1}$ a ε za hodnotu K v předeslané pomocné větě, máme nerovnost

$$\left| u_n a^n \frac{x^n}{a^n} + u_{n+1} a^{n+1} \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}} + \ldots + u_{n+\nu} a^{n+\nu} \frac{x^{n+\nu}}{a^{n+\nu}} \right| < \frac{x^n}{a^n} \varepsilon,$$

tedy platí

$$| u_n x^n + u_{n+1} x^{n+1} + \ldots + u_{n+\nu} x^{n+\nu} | < \varepsilon, \quad n > p,$$

nechť jest x kterákoli hodnota intervallu $(0 \ldots a)$, a ν jakékoli.

Tím ale dokázána stejnoměrná konvergence řady (6) v tomto intervallu; řada ta jest tedy dle čl. 45. spojitou funkcí proměnné x v tomto intervallu, a má tedy (čl. 43.) tato funkce pro $\lim x = a$ za limitu součet řady (7), jak bylo dokázati.

46. Řada dvojitá.

Buďte

$$\begin{aligned} s^{(1)} &= a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} + \ldots, \\ s^{(2)} &= a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + a_3^{(2)} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{8}$$

konvergující řady o kladných členech, a budiž

$$S = s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} + \ldots \tag{9}$$

též konvergující řada; pak se přiblížíme hodnotě S s libovolnou

přesností, jestliže sečteme součty, které obdržíme sečítáním prvních N členů řad $s^{(1)}$, $s^{(2)}$ .. $s^{(M)}$, jsou-li jen čísla M a N dosti velká.

Přibližná hodnota ta

$$V = \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu^{(1)} + \sum_{1}^{N} a_\nu^{(2)} + \ldots + \sum_{1}^{N} a^{(M)}_\nu$$

jest totiž menší než S o hodnotu

$$S - V = \sum_{N+1}^{\infty} a_\nu^{(1)} + \ldots + \sum_{N+1}^{\infty} a_\nu^{(M)} + s^{(M+1)} + s^{(M+2)} + \ldots$$

Budiž $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$ libovolné kladné číslo, a také ε', ε'' kladná čísla. Z konvergence řady (9) vychází existence čísla M takového, že

$$s^{(M+1)} + s^{(M+2)} + \ldots < \varepsilon'.$$

Ustanovme nyní čísla N_1, N_2, .. N_M taková, že

$$\sum_{1+N_1}^{\infty} a_\nu^{(1)} < \frac{\varepsilon''}{M}, \quad \sum_{1+N_2}^{\infty} a_\nu^{(2)} < \frac{\varepsilon''}{M}, \ldots$$

$$\sum_{1+N_M}^{\infty} a^{(M)}_\nu < \frac{\varepsilon''}{M},$$

věc možná vzhledem ke konvergenci řad (8). Je-li N největší z čísel N_1, .. N_M, máme ovšem také

$$\sum_{1+N}^{\infty} a_\nu^{(1)} < \frac{\varepsilon''}{M}, \ldots, \quad \sum_{1+N}^{\infty} a^{(M)}_\nu < \frac{\varepsilon''}{M},$$

a tedy

$$S - V < M \cdot \frac{\varepsilon''}{M} + \varepsilon', \text{ t. j. } S - V < \varepsilon,$$

jak bylo dokázati.

Poněvadž S — V s rostoucími M a N klesá, můžeme říci, že se V hodnotě S přibližuje s libovolnou přesností, jakmile M a N jisté meze překročí.

Avšak V možno psáti ve tvaru

$$V = \sum_{\mu=1}^{M} a_1^{(\mu)} + \sum_{1}^{M} a_2^{(\mu)} + \ldots + \sum_{1}^{M} a_N^{(\mu)};$$

pro $\lim \varepsilon = 0$, máme $\lim M = \infty$, $\lim N = \infty$ a $\lim V = S$, čímž

$$S = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_1^{(\mu)} + \sum_{1}^{\infty} a_2^{(\mu)} + \sum_{1}^{\infty} a_3^{(\mu)} + \ldots, \tag{10}$$

t. j. S obdržíme, sčítáme-li elementy v obrazci (8) podle sloupců, a sečteme-li pak součty za sebou jdoucí.

Buďte nyní (8) řady o elementech libovolně označených, však absolutně konvergující, a označme $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, . . součty řad z absolutních hodnot elementů utvořených; konverguje-li řada $\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \ldots$, platí opět výrok, že se V liší od S o libovolně málo pro dosti velké M a N, a platí tedy opět rovnost (10).

Neboť $|S - V|$ jest patrně menší než korrespondující rozdíl utvořený z řad $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(3)}$, . ., a tedy bude libovolně malý pro dosti velké M a N.

Mějme nyní speciálně řadu

$$s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} + \ldots, \tag{11}$$

jejíž členy jsou řady mocninné

$$\begin{aligned} s^{(1)} &= c_0^{(1)} + c_1^{(1)} x + c_2^{(1)} x^2 + \ldots, \\ s^{(2)} &= c_0^{(2)} + c_1^{(2)} x + c_2^{(2)} x^2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{12}$$

a předpokládejme, že tyto řady (12) konvergují všecky absolutně při $x = a$, kde a značí kladné číslo. Označme $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ . . součty absolutních obnosů členů při $x = a$, tedy

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= |c_0^{(1)}| + |c_1^{(1)}| a + |c_2^{(1)}| a^2 + \ldots, \\ \sigma^{(2)} &= |c_0^{(2)}| + |c_1^{(2)}| a + |c_2^{(2)}| a^2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Jestliže řada o kladných členech

$$\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)} + \ldots$$

konverguje, konverguje řada (11) v intervallu $(-a \ldots a)$ patrně stejnoměrně a definuje v něm spojitou funkci $F(x)$.

Dle předchozí věty *se součet* (11) *rovná součtu, který obdržíme, sečítáme-li v* (12) *elementy nejprve dle sloupců, a nápotom vzniklé součty, t. j. platí rovnice**)

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots, \quad -a \leqq x \leqq a,$$

kde

$$A_m = c_m^{(1)} + c_m^{(2)} + c_m^{(3)} + \ldots, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

jsou ovšem řady konvergující.

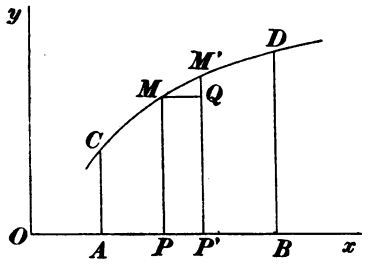
Věta trvá patrně v platnosti i tehdy, kdy řady jsou konečné, t. j. polynomy, tedy vždy konvergující; stačí v nich za další členy vzíti 0.

---

*) Sr. *Cauchy*, Analyse algébrique, Note VII; *Weierstrass*, Abh. aus der Functionenlehre, pag. 236, *Tannery*, l. c. pag. 178.

47. Geometrické znázornění funkce.

Funkci $f(x)$ definovanou v intervallu $(a \,..\, b)$ znázorníme tím způsobem, že si vytkneme dvě osy souřadné Ox a Oy (obr. 1.), a že sestrojíme úsečku OP, jejíž měrné číslo jest x, a pořadnici PM, jejíž měrné číslo jest $f(x)$. Nabývá-li x všech hodnot od $a = OA$, do $b = OB$, naplní bod P přímku AB, a bod M jistý geometrický útvar CD, znázorňující funkční hodnoty $f(x)$*).



Obr. 1.

Jest-li funkce $f(x)$ v intervallu $(a \,..\, b)$ spojitá, a buď stále rostoucí neb stále klesající, jest geometrický útvar ten čára z bodu C do bodu D vedoucí, t. j. od libovolného bodu M tohoto útvaru se v libovolné vzdálenosti δ menší než $\overline{MC}$ i než $\overline{MD}$, nalézá určitý počet**), zde dva body M', M'' útvaru, a všecky body útvaru mezi M a M', jakož i mezi M a M'' mají od M vzdálenost menší než δ.

Značí-li totiž $OP' = x'$, $P'M' = f(x')$ souřadnice libovolného bodu útvaru, jest jeho vzdálenost od M

$$\varphi(x') = \sqrt{(x'-x)^2 + (f(x') - f(x))^2};$$

tento výraz jest spojitou funkcí proměnné x' (čl. 52.) a rostoucí s $|x' - x|$, je-li $f(x)$ stále rostoucí neb ubývající. Nabude tedy $\varphi(x')$ každé hodnoty δ, nepřesahující větší z čísel $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, jednou pro určitou hodnotu $x' = x + h$ a jednou pro určitou hodnotu $x' = x - k$; pro hodnoty $x' = x + \vartheta h$ a $x' = x - \vartheta k$, kde ϑ jest mezi 0 a 1, nabývá $f(x')$ patrně hodnot menších než δ.

Naopak jest každou spojitou čarou CD, kterou rovnoběžka s osou Oy protíná vždy jen v jednom bodě, vytčena spojitá funkce $f(x)$, totiž pořadnice MP jakožto funkce úsečky OP; pak možno totiž MM' učiniti libovolně malou délkou, a tedy i

$$M'Q < MM', \text{ t. j. rozdíl } f(x') - f(x)$$

možno učiniti číselně libovolně malým, volíme-li $|x' - x|$ dosti malé.

---

*) V krásné knize: *Genocchi-Peano*, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung, deutsch v. G. Bohlmann u. A. Schepp, se na str. 17. útvar ten nazývá čarou, avšak výslovně se podotýká, že takové čáře obecně nelze připisovati vlastnosti čar, s nimiž obyčejně operujeme, a že ovšem by bylo nesprávné, chtíti se o tyto vlastnosti opírati za účelem odvození vlastnosti funkcí.

**) Sr. *Bolzano*, Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und Cubirung etc., Leipzig, 1817, § 11.

48. **Spojitost funkce dvou neb více proměnných.**

Funkce $f(x, y)$ dvou proměnných jest definována v jistém oboru, známe-li její hodnotu pro všecky hodnoty x, y tohoto oboru.

O funkci $f(x, y)$ pravíme, že jest spojitá pro hodnoty č. pro bod x, y (čl. 37.), existují-li ku každému kladnému ε dvě kladná čísla η, η_1 taková, že pro každé dvě hodnoty x', y' hovící nerovnostem

$$| x' - x | < \eta, \quad | y' - y | < \eta_1$$

platí nerovnost

$$| f(x', y') - f(x, y) | < \varepsilon.$$

O funkci $f(x, y)$ pravíme, že jest spojitá v jistém oboru, možno-li tento obor rozděliti na konečný počet parciálných oborů takových, že pro každé dvě soustavy hodnot x, y a x', y' náležející do téhož parciálného oboru, platí poslední nerovnost, při čemž ε značí jakkoli malé kladné číslo. Funkce spojitá v jistém oboru jest patrně spojitá v každém bodě x, y tohoto oboru.

Analogicky k úvaze článku 40. možno dokázati větu: Je-li $f(x, y)$ funkce spojitá v každém bodě jistého oboru, jest i funkcí spojitou v tomto oboru.

Obdobně jako v čl. 41. soudíme, že součet, rozdíl a součin spojitých funkcí dvou proměnných jest opět funkcí spojitou, a taktéž i podíl pro hodnoty x, y, které neannullují dělitele. Obdobné definice a věty platí pro funkce více proměnných*).

Funkci $f(x, y)$ dvou proměnných možno snadno geometricky znázorniti plochou. Veďme libovolným bodem O tři navzájem kolmé osy Ox, Oy, Oz a nanesme proměnné x, y jakožto pravoúhlé souřadnice jistého bodu P v rovině Oxy; příslušnou hodnotu $f(x, y) = z$ nanesme na přímku bodem P roznoběžně k ose Oz vedenou, tak že $z = \mathrm{PM}$, nanášejíce ovšem kladné hodnoty z ve smyslu kladné osy Oz, záporné ve smyslu opáčném. Souhrn bodů M, tímto způsobem získaných, znázorňuje funkci $f(x, y)$; je-li tato funkce spojitá, naplní body M také spojitou plochu, zobrazující onu funkci.

49. **Komplexní proměnné a funkce.**

Komplexní hodnota $z = x + iy$ se nazývá proměnnou, jsou-li x neb y neb obě tyto reálné hodnoty proměnnými.

---

*) Sr. *Genocchi-Peano*, l. c. kap. IV., kde odvozeny také věty o horní a dolní mezi funkce více proměnných.

Hodnota $Z = X + iY$ závislá na z sluje funkcí komplexní proměnné z a značí se $f(z)$; jsou tedy X a Y obecně pak funkce dvou reálných proměnných x, y.

Funkce $f(z)$ sluje spojitou pro hodnotu z čili v bodě z, t. j. v bodě o souřadnicích x, y (čl. 15.), platí-li pro libovolné kladné ε

$$| f(z') - f(z) | < \varepsilon$$

pro všecka z' hovící nerovnosti $| z' - z | < \eta$, kde η jest kladná hodnota, závislá ovšem na ε.

Kladouce

$$z' = x' + iy', \quad f(z') = X' + iY'$$

máme tedy

$$\sqrt{(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2} < \varepsilon \quad \text{při} \quad \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} < \eta$$

a tedy i

$$| X' - X | < \varepsilon, \quad | Y' - Y | < \varepsilon$$

$$\text{při} \quad | x' - x | < \frac{\eta}{\sqrt{2}}, \quad | y' - y | < \frac{\eta}{\sqrt{2}}$$

a naopak, t. j. $f(z)$ jest spojitá pro hodnotu z, jsou-li X a Y spojité funkce pro hodnoty x, y.

Jest-li funkce $f(z)$ komplexní proměnné z spojitá ve všech bodech z jistého oboru, jest i spojitá v tomto oboru, t. j. k libovolnému kladnému ε existuje kladné η takové, že platí nerovnost $| f(z') - f(z) | < \varepsilon$ pro každé dvě hodnoty z, z' oboru hovící nerovnosti $| z' - z | < \eta$. Dle čl. 47. jsou pak X a Y spojité v daném oboru, a tedy existuje kladné η' takové, že při

$$| x' - x | < \eta', \quad | y' - y | < \eta' \quad \text{platí} \quad | X' - X | < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

$$| Y' - Y | < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}};$$

stačí vzíti $\eta = \eta' \sqrt{2}$, aby platilo $\sqrt{(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2} < \varepsilon$ při $\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} < \eta$, jak bylo dokázati.

Součet, součin a podíl dvou funkcí komplexní proměnné z spojitých jest opět funkce spojitá; při podílu nesmí ovšem jmenovatel pro uvažovanou hodnotu z vymizeti. Vskutku, jsou-li

$$f(z) = X + iY, \; f_1(z) = X_1 + iY_1$$

dané funkce, spojité pro hodnotu $z = x + iy$, máme (čl. 16.)

$$f(z) + f(z_1) = X + X_1 + i(Y + Y_1),$$
$$f(z) f(z_1) = XX_1 - YY_1 + i(XY_1 + YX_1),$$
$$\frac{f(z)}{f_1(z)} = \frac{XX_1 + YY_1}{X_1^2 + Y_1^2} + i\,\frac{YX_1 - XY_1}{X_1^2 + Y_1^2},$$

a jsou tedy jak reálné části, tak koefficienty při i na pravé straně spojité funkce proměnných x, y (čl. 47.), při čemž v poslední rovnici $X_1^2 + Y_1^2$ ovšem nesmí vymizeti, t. j. nesmí býti $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, t. j. nesmí býti $f_1(z)$ nullou.

50. **Funkce exponenciálná.**

Elementárné funkce, tvořící hlavně početní materiál v analysi, jsou funkce racionálné, obecněji algebraické, exponenciálná a její inversní logarithmická, funkce goniometrické a jich inversní t. cyklometrické.

K definici a spojitosti funkcí racionálných bylo již přihlédnuto: bližší prozkoumání obecných funkcí algebraických by vymáhalo zvláštního, obšírného studia, pročež se omezíme na speciálné funkce algebraické, s nimiž se průběhem těchto úvah setkáme, přihlédneme však ihned k funkcím exponenciálné a trigonometrickým a k jich inversním.

Funkci exponenciálnou a^x definujeme pro reálný argument x následujícím způsobem:

Značí-li a číslo kladné různé od 1, racionálné neb irracionálné, má $y = a^x$ při každém celistvém x určitou hodnotu; při kladném celistvém x jest to součin x součinitelů a, při záporném celistvém $x = -x'$ jest to ex definitione $1 : a^{x'}$.

Při každém racionálném kladném $x = \frac{m}{n}$ má $y = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ jednu kladnou hodnotu (čl. 15.), a tu označíme jakožto hodnotu funkce $y = a^x$; při racionálném záporném $x = -\frac{m}{n}$ klademe $y = 1 : a^{\frac{m}{n}}$, a máme opět pro y jednu a s. kladnou hodnotu.

Jest-li konečně x číslo irracionálné, utvořme posloupnost racionálných hodnot

(13) $$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

konvergující k x a udělme funkci a^x hodnotu, k níž konverguje

posloupnost

(14) $$a^{x_1},\quad a^{x_2},\quad a^{x_3},\ \ldots;$$

že tato posloupnost konverguje, a že konverguje k hodnotě závisle pouze na x, ihned ukážeme.

K tomu cíli ukažme, že $\lim a^x = 1$ pro případ, že se racionálné x blíží nulle. — Budiž nejprve $a > 1$, dále ε libovolně malé kladné číslo a konečně značiž m kladné celistvé číslo. Nerovnost

(15) $$a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$$

bude vyplněna, možno-li m tak voliti, aby $(1 + \varepsilon)^m > a$. Avšak dle věty binomické máme

$$(1 + \varepsilon)^m = 1 + m\varepsilon + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^m,$$

kde na pravo všecky sčítance jsou kladné, pročež

$$(1 + \varepsilon)^m > 1 + m\varepsilon.$$

Nerovnost (15) bude tedy vyplněna, volíme-li m takové, aby

$$1 + m\varepsilon \geqq a, \quad m \geqq \frac{a-1}{\varepsilon}.$$

Při $0 < x \leqq \frac{1}{m}$ jest tedy $a^x \leqq a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$ a zároveň $a^x > 1$,

jelikož možno a^x sevříti mezi $a^{\frac{1}{\mu}}$ a $a^{\frac{1}{m}}$, t. j. $\sqrt[\mu]{a}$ a $\sqrt[m]{a}$, jež obě jsou větší než 1, volíme-li jen $\frac{1}{\mu} < x$.

Jest tedy pro dosti malé kladné x rozdíl $a^x - 1$ kladný a $< \varepsilon$, t. j. $\lim a^x = 1$ pro $\lim x = 0$.

Při záporném $x = -y$ blížícím se nulle, jest $a^x = 1 : a^y$, a tedy (čl. 43.) opět $\lim a^x = 1 : \lim a^y = 1 : 1 = 1$.

Budiž, za druhé, $0 < a < 1$; učiníce $\frac{1}{a} = b$, jest $b > 1$, zároveň $a^x = b^{-x}$ a tedy opět $\lim a^x = 1$ pro $\lim x = 0$.

Mějme nyní irracionálné x, a budiž (13) posloupnost stoupající, jež má x za limitu. Poněvadž při $a > 1$ pro racionálné x_1, x_2 při $x_1 < x_2$ platí $a^{x_1} < a^{x_2}$, jest i (14) posloupnost stoupající, a její členy jsou vesměs menší než $a^{x'}$, značí-li x' racionálné číslo větší než x a tedy i větší než každý člen v (13); dle čl. 13. jest tedy i posloupnost (14) konvergující a má jistou limitu, kterou označíme a^x.

Značí-li

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ \ldots$$

klesající posloupnost racionálných čísel o limitě x, plyne obdobně konvergence posloupnosti

$$a^{x'_1},\ a^{x'_2},\ a^{x'_3},\ \ldots,$$

a limita její jest opět a^x; neboť rozdíl

$$a^{x'_n} - a^{x_n} = a^{x_n}\left(a^{x'_n - x_n} - 1\right)$$

se vzhledem k $\lim (x'_n - x_n) = 0$ stává číselně libovolně malým.

Zcela obdobně bychom soudili v případě $0 < a < 1$.

Tím jest exponenciálná funkce a^x definována pro každé reálné x.

Obyčejně jest základ $a > 1$, a pak také při irracionálných x, x' pro $x < x'$ platí $a^x < a^{x'}$, t. j. funkce exponenciálná roste pak s argumentem; možno totiž racionálné x'' tak voliti, že platí $x < x'' < x'$, a x definovati rostoucí posloupností racionálných čísel (13), x' pak rostoucí posloupností racionálných čísel $x'_1, x'_2, \ldots$ vesměs větších než x'', a tedy větších než každý člen posloupnosti (13), z čehož nerovnost $\lim a^{x_n} < \lim a^{x'_n}$, t. j. $a^x < a^{x'}$ patrna.

51. **Vlastnosti funkce exponenciálné.**

Funkce a^x, nabývající jen kladných hodnot, jest spojitá pro každé x a tedy i v každém intervallu.

Jest totiž

$$a^{x'} - a^x = a^x\left(a^{x'-x} - 1\right),$$

a tedy

$$\left| a^{x'} - a^x \right| = a^x \left| a^{x'-x} - 1 \right| < \varepsilon,$$

kde ε značí libovolné kladné číslo, platí-li

$$\left| a^{x'-x} - 1 \right| < \varepsilon a^{-x},$$

čehož dle předchozího článku docílíme, volíme-li rozdíl $x' - x$ číselně dosti malým.

Hodnotu funkce a^x pro $x = 0$ definujeme $= 1$, aby funkce i pro $x = 0$ byla spojitá; neboť to vymáhá (čl. 43.), aby pro $\lim x = 0$ platila rovnost $\lim a^x = a^0$ t. j. $1 = a^0$.

Dle čl. 41. jest i $a^{\varphi(x)}$ spojitou funkcí proměnné x, značí-li $\varphi(x)$ spojitou funkci této proměnné.

Funkce a^x jest při $a > 1$ v každém intervallu rostoucí a s. roste s x nad každé kladné číslo A, t. j. $\lim a^x = \infty$ pro $\lim x = \infty$. Položme $a = 1 + \varepsilon$ a máme pro celistvé kladné m

$$a^m = (1 + \varepsilon)^m > A \quad \text{při} \quad m > \frac{A - 1}{\varepsilon}.$$

Pro $\lim x = -\infty$ jest $\lim a^x = 0$, neboť klademe-li $x = -u$, jest $a^x = 1 : a^u$, a pro $\lim u = \infty$ máme $\lim a^x = 0$.

Při $a < 1$ se mají věci opáčně; patrně pak $\lim a^x = 0$ pro $\lim x = \infty$, a $\lim a^x = \infty$ pro $\lim x = -\infty$.

Exponenciálná funkce a^x hoví *funkcionálné rovnici*

$$a^x a^{x'} = a^{x+x'}.$$

Pro racionálné x a x' se tato rovnost dokazuje v elementech algebry; při irracionálných x a x' stačí je definovati posloupností racionálných veličin x_n resp. x'_n a pak z rovností

$$a^x = \lim_{n=\infty} a^{x_n}, \quad a^{x'} = \lim_{n=\infty} a^{x'_n}$$

dle čl. 43. a dle definice exponenciálné funkce souditi

$$\lim a^{x_n} . \lim a^{x'_n} = \lim (a^{x_n} . a^{x'_n}) = \lim a^{x_n + x'_n} = a^{\lim (x_n + x'_n)},$$

t. j.

$$a^x a^{x'} = a^{x+x'}.$$

Z ní snadno vychází pro každé x a μ

$$(a^x)^\mu = a^{\mu x}.$$

Rovnice ona jest charakteristickou pro funkci exponenciálnou, jakož v čl. 56. ukážeme; t. j. každá spojitá funkce $f(x)$ neobmezené proměnné x, která hoví rovnici

$$f(x + x') = f(x) f(x'),$$

jest funkcí exponenciálnou, totiž $f(x) = a^x$, kde a značí nějakou kladnou hodnotu.

52. **Funkce logarithmická.**

Inversní funkce k funkci exponenciálné sluje funkcí logarithmickou, t. j. je-li $a^x = \xi$, nazýváme x logarithmem čísla ξ pro základ (basis) a a píšeme $x = \log_a \xi$. Základ a jest ovšem kladné číslo $\gtrless 1$, a s. se béře $a > 1$. Roste-li pak x od $-\infty$ do $+\infty$, roste ξ spojitě od 0 do $+\infty$ a nabývá tedy každé kladné hodnoty jednou a jen jednou; ku každému kladnému číslu ξ náleží tedy jeden logarithmus, a týž jest dle čl. 44. spojitou funkcí proměnné ξ v intervallu $(0 \ldots \infty)$.

Vzhledem k $a^0 = 1$ jest $\log_a 1 = 0$, a tedy při $\xi > 1$ jest $\log \xi > 0$, a při $\xi < 1$ jest $\log \xi < 0$. Logarithmus základu jest ovšem 1.

Pro logarithmus součinu a podílu máme formule

$$\log(\xi\eta) = \log \xi + \log \eta, \quad \log \frac{\xi}{\eta}, = \log \xi - \log \eta;$$

klademe-li totiž

$$\log \xi = x, \quad \log \eta = y.$$

platí

$$\xi = a^x, \quad \eta = a^y, \quad \xi\eta = a^{x+y}, \quad \frac{\xi}{\eta} = a^{x-y},$$

a tedy

$$\log(\xi\eta) = x + y, \quad \log \frac{\xi}{\eta} = x - y,$$

jak bylo dokázati.

Obdobně vychází, že při celistvém kladném m

$$\log(\xi^m) = m \log \xi, \quad \log \sqrt[m]{\xi} = \frac{1}{m} \log \xi,$$

a obecněji při racionálném exponentu

$$\log\left(\xi^{\frac{m}{x}}\right) = \frac{m}{n} \log \xi, \quad \log\left(\xi^{-\frac{m}{n}}\right) = \log \frac{1}{\xi^{\frac{m}{n}}} = -\log \xi^{\frac{m}{n}}$$

$$= -\frac{m}{n} \log \xi;$$

je-li α číslo irracionálné, stanovené posloupností racionálných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, máme vzhledem k spojitosti funkce exponenciálné

$$\xi^\alpha = \lim_{n=\infty} \xi^{\alpha_n},$$

a vzhledem k spojitosti funkce logarithmické

$$\log \xi^\alpha = \lim \log \xi^{\alpha_n} = \lim (\alpha_n \log \xi) = \lim \alpha_n \,.\, \log \xi = \alpha \log \xi.$$

Logarithmy všech kladných čísel vzaté vzhledem k základu a tvoří soustavu logarithmickou o tomto základu. Logarithmy dvou soustav o základech a, b mají stálý poměr; máme-li totiž

$$\log_a \xi = x, \quad \log_b \xi = y,$$

znamená to, že

$$\xi = a^x, \quad \xi = b^y, \quad \text{tedy} \quad a^x = b^y.$$

Vezmeme-li logarithmy těchto dvou stejných čísel, jednou v soustavě o basi a, jednou v soustavě o základě b, obdržíme

$$x = y \log_a b, \quad x \log_b a = y,$$

a tedy

$$\frac{x}{y} = \log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

t. j. podíl

$$\frac{\log_a \xi}{\log_b \xi} = \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

jest stálý, nezávislý na čísle ξ. Znajíce tedy logarithmy čísel v soustavě a, obdržíme jich logarithmy v soustavě b, násobíme-li je stálým faktorem $\log_b a$ čili $\frac{1}{\log_a b}$.

Soustav logarithmických jest ovšem možných nekonečné množství; z nich jsou však v užívání zvláště dvě: soustava logarithmů přirozených či Neperových o základě

$$e = \lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m,$$

a soustava logarithmů dekadických č. Briggových č. obecných o základě 10. Přirozený logarithmus čísla ξ označíme $\log \xi$, umělý, t. j. vzatý k jinému základu než e, označíme $\mathrm{Log}\ \xi$.

Jest-li $\varphi(x)$ spojitá funkce proměnné x, nabývající pouze kladných hodnot, jest dle čl. 41. také $\log \varphi(x)$ spojitou funkcí proměnné x.

Funkce $y = u^v$, kde u a v jsou spojité funkce proměnné x v jistém intervallu a mimo to u jest stále kladnou v tomto intervallu, jest též spojitou funkcí proměnné x; neboť vzhledem k $u = e^{\log u}$ jest

$$y = e^{v \log u},$$

a exponent $v \log u$ jest spojitou funkcí.

Jakožto speciálný případ máme při stálém $v = m$ funkci mocninnou

$$y = u^m;$$

ta jest tedy spojitá při spojitém u, nechť jest m jakékoli číslo reálné, kladné nebo záporné. N. p. $\sqrt[n]{\varphi(x)}$, kde $\varphi(x)$ značí racionálnou celistvou funkci, jest funkcí spojitou pro všecky x při lichém n, a pro všecky x činící $\varphi(x) > 0$ při sudém n.

N. p. $y = a^{\varphi(x)}$, kde $a > 0$ a $\varphi(x)$ značí opět celistvou racionálnou funkci, jest spojitá v každém intervallu.

Funkce $y = a^{\frac{1}{x-c}}$, kde $a > 0$, jest spojitá v každém intervallu neobsahujícím hodnotu c, pro niž se exponent stává nespojitým, a jest nespojitá pro $x = c$; skutečně pro $x = c \pm h$ máme $y = a^{\pm\frac{1}{h}}$ a hodnota $a^{-\frac{1}{h}}$ pro $\lim h = 0$ se blíží sice 0, ale hodnota $e^{\frac{1}{h}}$ roste nad každé číslo.

Jest-li $\varphi(x)$ pro jisté x nespojitá, může $y = a^{\varphi(x)}$, $a > 0$, býti pro tuto hodnotu x nespojitou ale i spojitou funkcí; první případ doložen předchozím příkladem, druhý doložíme funkcí

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

kladouce $y = 0$ pro $x = 0$. Zde $-\frac{1}{x^2}$ pro $x = 0$ jest nespojitá funkce, nechť si jí připíšeme jakoukoli hodnotu pro $x = 0$ (sr. čl. 39.), a přece jest y funkce spojitá; neboť pro $x = \pm h$ jest $y = e^{-\frac{1}{h^2}}$ a tedy $\lim y = 0$ při $\lim h = 0$.

Funkce n. p. $y = \frac{ae^{\frac{1}{x}} + b}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ jest spojitá pro všecka $x \gtrless 0$, neboť pro ně jest jak čítatel tak jmenovatel spojitý, a tento různý od 0. Blíží-li se x nulle hodnotami kladnými, roste $e^{\frac{1}{x}}$ nad každé číslo a tedy jest pak

$$\lim y = \lim \frac{a + \frac{b}{e^{1/x}}}{1 + \frac{1}{e^{1/x}}} = a;$$

blíží-li se ale x nulle hodnotami zápornými $x = -x_1$, tu se $e^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x_1}}$ blíží nulle a máme $\lim y = b$. Jest tedy y pro $x = 0$ nespojitou funkcí.

53. Číslo e, funkce exponenciálná ve tvaru limity.

Uvažujme limitu

$$\lim_{m = \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

nejprve pro případ, že m nabývá jen celistvých kladných hodnot. Pak dle věty binomické

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2} + \cdot\cdot + \frac{1}{m^m}.$$

Budiž n celistvé kladné číslo menší než m, a R_n součet členů na pravé straně, které jdou za $n+1$-ním, tedy provedouce divise

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \cdot\cdot$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\cdot\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\,..\,n} + R_n,$$

kde

$$R_n = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\cdot\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\,..\,n}$$
$$\left[\frac{1-\frac{n}{m}}{n+1} + \frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{(n+1)\,(n+2)} + \cdot\cdot\right]$$

obsahuje ve velké závorce $m-n$ členů, patrně menších než resp. členy geometrické řady

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdot\cdot,$$

jejíž součet, postupuje-li řada do nekonečna, jest

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

Máme tedy značíce literou ϑ jistou hodnotu mezi 0 a 1,

$$R_n = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\cdot\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\,..\,n}\cdot\frac{\vartheta}{n}.$$

Volme za n pevné číslo a nechme m růsti do nekonečna; pak

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdot\cdot$$
$$+ \frac{1}{\lfloor n} + \lim R_n.$$

a
$$\lim R_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \cdot \frac{\vartheta'}{n},$$

značí-li ϑ' limitu hodnoty ϑ; ovšem platí $0 < \vartheta' < 1$. Volíme-li n dosti velké, jest $\lim R_n$ libovolně malé a tedy se součet s_n prvních n členů konvergentní řady (čl. 25.)

$$2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}} + \ldots$$

přibližuje k $\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ s libovolnou přesností, t. j.

$$\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Oč jest součet s_n menší než e, lze odhadnouti, píšeme-li

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}} + \frac{1}{\underline{|n}} \frac{\vartheta'}{n}, \quad 0 < \vartheta' < 1;$$

tím nalezeno $e = 2{\cdot}718\ 281\ 828\ 459\ 045 \ldots$

Nechť roste nyní m do nekonečna, nabývajíc jinak libovolných kladných hodnot a budiž $\mu + 1$ celistvé číslo bezprostředně větší než m, tedy $\mu \leqq m < \mu + 1$; pak

$$\left(1 + \frac{1}{\mu + 1}\right)^{\mu} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu + 1}$$

čili

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{\mu + 1}\right)^{\mu + 1}}{1 + \frac{1}{\mu + 1}} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Pro $\lim \mu = \infty$ jest limita levé strany patrně e, a taktéž pravého výrazu; jest tedy také $\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$.

Nechť konečně $\lim m = -\infty$; učiníme-li $m = -\mu$, bude $\lim \mu = \infty$ a píšeme-li

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu}{\mu - 1}\right)^{\mu}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right)^{\mu} = \left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right)^{\mu - 1} \left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right),$$

máme opět

$$\lim_{m=-\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Má tedy $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ pro $\lim m = \pm\infty$ za limitu číslo e.

Číslo e jest irracionálné, o čemž, jakož i o irracionálnosti hodnoty e^x při racionálném x a hodnoty π podal první důkaz *Lambert*. Následující jednoduchý důkaz pochází od *Fouriera*.

Kdyby bylo e racionálné, tedy $e = \frac{r}{s}$, kde r, s jsou nesoudělná čísla celistvá, tu pišme rovnost $se = r$ ve tvaru

$$1 . 2 . 3 . . (s-1) . se = 1 . 2 . 3 . . (s-1) . r$$

čili

$$1 . 2 . 3 . . s\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1 . 2}+\frac{1}{1 . 2 . 3}+\cdot\cdot\right) = 1 . 2 . . (s-1) . r.$$

Vynásobíme-li v levo, zruší se zlomky až do s-ho a máme, značíce literou p celistvé číslo,

$$p+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}+\cdot\cdot = 1 . 2 . 3 . . (s-1) . r.$$

Nazveme-li součet nekonečné řady, za p následující, stručně R, máme patrně

$$R < \frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^3}+\cdot\cdot,$$

t. j.

$$R < \frac{1}{s}, \quad R = \frac{\vartheta}{s},$$

kde ϑ značí hodnotu mezi 0 a 1; a tedy

$$p+\frac{\vartheta}{s} = 1 . 2 . . (s-1) . r,$$

z čehož by šlo, že $\frac{\vartheta}{s}$ jest rozdílem dvou celistvých čísel, tedy 0 neb číslo celistvé, věc patrně nemožná. Jest tedy e irracionálné.

Funkci exponenciálnou e^x možno vyjádřiti jakožto limitu formulí

$$e^x = \lim_{m=\pm\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m.$$

Položme $\frac{m}{x} = \mu$, tedy při $\lim m = \pm\infty$ jest $\lim \mu = \pm\infty$ při $x > 0$ a $\lim \mu = \mp\infty$ při $x < 0$. Nyní

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu x} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^x,$$

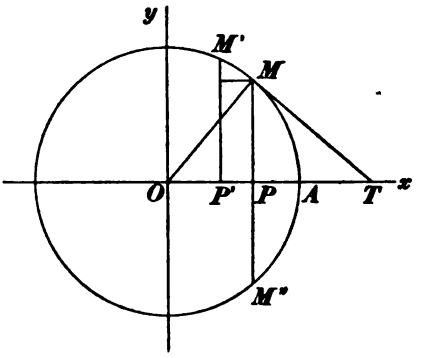
a tedy, vzhledem k spojitosti funkce mocninné,

$$\lim_{m=\pm\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\left[\lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^x=e^x.$$

54. Funkce goniometrické.

Kolem počátku O pravoúhlých os souřadných Ox, Oy opišme kružnici o poloměru 1; ji protniž kladná osa x v bodě A. Značme u délku oblouku AM vzatou kladně, setká-li se bod probíhající kružnici ve směru tohoto oblouku, nejprve s kladnou osou y a nápotom se zápornou, a záporně, setká-li se nejprve se zápornou a pak s kladnou osou y. Souřadnice x, y bodu M jsou pak funkce oblouku u, jímž měříme středový úhel AOM, definované pro každé reálné u, a jež se značí

$$x=\cos u,\quad y=\sin u.$$



Obr. 2.

Funkce ty nabývají pouze hodnot intervallu $(-1\,..\,+1)$; vzhledem k $x^2+y^2=1$ platí pro každé u relace

$$\cos^2 u+\sin^2 u=1.$$

Funkce $\cos u$, $\sin u$ jsou spojité pro každé u; přejde-li u do hodnoty $u+h=\mathrm{OM'}$, jsou přírůsty souřadnic x a y patrně menší než tětiva MM', a tedy i menší než oblouk $\mathrm{MM'}=|h|$, a tedy libovolně malé pro dosti malé $|h|$.

Poněvadž délka celé kružnice jest 2π, značí-li π Ludolfovo číslo, přísluší obloukům č. úhlům u a $u+2\pi$ týž koncový bod M a tedy i tytéž hodnoty x, y, t. j. pro každé u platí relace

$$\cos(u+2\pi)=\cos u,\quad \sin(u+2\pi)=\sin u;$$

jsou tedy funkce $\sin u$ a $\cos u$ periodické a mají periodu 2π.

Zároveň patrno, že oblouky u a $-u$ stanoví dva koncové body symmetricky položené k ose x, mající tedy touž úsečku, a pořadnice různící se pouze znamením; platí tedy

$$\cos -u=\cos u,\quad \sin -u=-\sin u.$$

Ostatní funkce goniometrické se definují rovnicemi

$$\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u},\ \operatorname{cotg} u = \frac{\cos u}{\sin u},\ \sec u = \frac{1}{\cos u},\ \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u},$$

jež ukazují, že jsou i tyto funkce spojité pro všecky hodnoty proměnné u vyjma ony, pro něž jmenovatel vymizí; pro $\operatorname{tg} u$ a $\sec u$ jsou vyjmuty hodnoty u annullující $\cos u$, t. j. hodnoty $u = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, a pro $\operatorname{cotg} u$ a $\operatorname{cosec} u$ hodnoty annullující $\sin u$, t. j. hodnoty $u = \pm k\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

V trigonometrii se z této geometrické definice funkcí goniometrických odvozuje řada důležitých formulí, jako n. p. formule vyjadřující $\sin(u + v)$, $\cos(u + v)$, a p goniometrickými funkcemi argumentů u a v; formule ty pokládáme ovšem za známé.

Pro pozdější úvahy jest záhodno znáti $\lim \frac{\sin u}{u}$ pro případ, že u konverguje k nulle. Budiž tedy (obr. 2.) u malý oblouk AM a budiž M'' bod kružnice souměrný k bodu M vzhledem k ose x; pak patrně $MM'' = 2 \sin u$. Protne-li tečna v bodě M sestrojená osu x v bodě T a tětiva MM'' touž osu v bodě P, jest trojúhelník OPM podobný trojúhelníku OMT a tedy

$$MP : OP = TM : OM$$

čili

$$\sin u : \cos u = TM : 1,$$

a tedy $TM = \operatorname{tg} u$. Z planimetrie však jest známo, že

$$MM'' < \text{oblouk } MM'' < MT + TM'',$$

čili

$$2 \sin u < 2u < 2 \operatorname{tg} u,$$

aneb dělivše hodnotou $2 \sin u$,

$$1 < \frac{u}{\sin u} < \frac{1}{\cos u}.$$

Blíží-li se u nulle, jest $\frac{u}{\sin u}$ stále mezi 1 a hodnotou $\frac{1}{\cos u}$, jejíž limita pro $\lim u = 0$ jest patrně také 1, z čehož soudíme, že

$$\lim \frac{u}{\sin u} = 1 \quad \text{a tedy také} \quad \lim \frac{\sin u}{u} = 1 \quad \text{pro } \lim u = 0.$$

Blíží-li se u nulle hodnotami zápornými $u = -u'$, máme opět

$$\lim \frac{\sin u}{u} = \lim \frac{\sin -u'}{-u'} = \lim \frac{\sin u'}{u'} = 1.$$

55. Funkce cyklometrické.

Tímto názvem se označují funkce inversní k funkcím goniometrickým.

Roste-li u od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$, roste $y = \sin u$ spojitě od -1 do 1; jest tedy (čl. 44.) u spojitou a rostoucí funkcí proměnné y v intervallu $(-1\,..\,1)$, a tuto funkci označujeme $\arcsin y$.

Rovnost

$$\arcsin y = u, \quad -1 \leqq y \leqq 1,$$

jest tudíž aequivalentní dvěma výrokům

$$y = \sin u, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Z této definice ihned vychází, že

$$\arcsin -y = -\arcsin y,$$

$$\arcsin 0 = 0, \ \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \ \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ atd.};$$

a dále jest patrno, že všecky hodnoty u, jichž sinus jest y, jsou dány výrazy

$$u = \arcsin y \pm 2k\pi, \ u = \pi - \arcsin y \pm 2k\pi, \ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Roste-li u od 0 do π, ubývá $x = \cos u$ spojitě od 1 do -1; jest tedy u spojitou a klesající funkcí proměnné x v intervallu $(-1\,..\,1)$, a funkci tu označujeme $\arccos x$. Rovnost

$$\arccos x = u, \quad -1 \leqq x \leqq 1$$

jest tedy aequivalentní s dvěma výroky:

$$x = \cos u, \quad 0 \leqq u \leqq \pi.$$

Z této definice jest patrné, že platí

$$\arccos -x = \pi - \arccos x,$$

$$\arccos 1 = 0, \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \text{ atd.}$$

Veškeré hodnoty u, jichž cosinus jest x, jsou dány výrazy $u = \arccos x \pm 2k\pi$, $u = -\arccos x \pm 2k\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Roste-li u od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$, roste $z = \operatorname{tg} u$ od $-\infty$ do $+\infty$ spojitě; jest tedy u spojitá a rostoucí funkce proměnné z v intervallu $(-\infty \,..\, \infty)$, a funkci tu označujeme arc tg z. Rovnost

$$\operatorname{arc\,tg} z = u$$

jest tedy aequivalentní rovnostem

$$z = \operatorname{tg} u, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Patrně platí

$$\operatorname{arc\,tg} - z = -\operatorname{arc\,tg} z,$$

$$\operatorname{arc\,tg} 0 = 0, \quad \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arc\,tg} \infty = \frac{\pi}{2}, \text{ atd.}$$

Obdobně značí arc cotg z_1 argument u, obsažený v mezích 0 a π, jehož cotg jest z_1; roste-li totiž u od 0 do π, ubývá funkci $z_1 = \operatorname{cotg} u$ spojitě od ∞ do $-\infty$, a jest tedy u spojitou a stále ubývající funkcí proměnné z_1 v intervallu $(-\infty \,..\, +\infty)$. Výrok

$$\operatorname{arc\,cotg} z_1 = u$$

jest tudíž aequivalentní dvěma výrokům

$$z_1 = \operatorname{cotg} u, \quad 0 \leqq u \leqq \pi.$$

Patrně

$$\operatorname{arc\,cotg} - z_1 = \pi - \operatorname{arc\,cotg} z_1,$$

$$\operatorname{arc\,cotg} 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arc\,cotg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arc\,cotg} - 1 = \pi - \frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{arc\,cotg} \infty = 0, \quad \operatorname{arc\,cotg} - \infty = \pi, \quad \text{atd.}$$

Dále jest patrné, že výrazy arc tg $z \pm 2k\pi$, arc tg $z + \pi \pm 2k\pi$ podávají všecky argumenty, jichž tg jest z, a výrazy arc cotg $z_1 \pm 2k\pi$, arc cotg $z_1 + \pi \pm 2k\pi$ všecky argumenty o cotangentě z_1.

Právě definované funkce cyklometrické hoví relacím

$$\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Budiž

$$\operatorname{arc\,sin} x = u, \quad \text{t. j.} \quad \sin u = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2},$$

a poznamenejme, že

(16) $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u = x.$$

Je-li $u > 0$, jest i $\frac{\pi}{2} - u$ v mezích o a $\frac{\pi}{2}$, a tedy vzhledem k (16)

$$\frac{\pi}{2} - u = \text{arc cos } x, \text{ t. j. } \frac{\pi}{2} = \text{arc sin } x + \text{arc cos } x;$$

je-li ale $u < 0$, jest $\frac{\pi}{2} - u$ v mezích $\frac{\pi}{2}$ a π, a tedy plynou vzhledem k (16) opět tyto dvě rovnosti. Obdobně platí druhá relace.

56 **Součet dvou cyklometrických funkcí.**

Součet neb rozdíl dvou cyklometrických funkcí téhož druhu možno vyjádřiti jako cyklometrickou funkci argumentu, složeného algebraicky z argumentů daných funkcí.

Máme-li n. p. dva kladné arc sin:

$$\text{arc sin } x = \alpha > 0, \quad \text{a tedy} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{arc sin } y = \beta > 0, \quad \text{a tedy} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

tu

$$\sin \alpha = x, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\sin \beta = y, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - y^2},$$

a tedy

(17) $$\sin (\alpha + \beta) = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2};$$

formuli tu však nemůžeme přímo obrátiti, dokud nevíme, v jakých mezích jest součet $\alpha + \beta$.

Vypočteme-li však

$$\cos (\alpha + \beta) = \sqrt{1 - x^2}\ \sqrt{1 - y^2} - xy,$$

možno ihned psáti

$$\alpha + \beta = \text{arc cos } (\sqrt{1 - x^2}\ \sqrt{1 - y^2} - xy),$$

t. j.

$$\text{arc sin } x + \text{arc sin } y = \text{arc cos } (\sqrt{1 - x^2}\ \sqrt{1 - y^2} - xy),$$

poněvadž $0 < \alpha + \beta < \pi$.

Je-li $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, jest $\cos (\alpha + \beta) > 0$, a při $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$

jest $\cos(\alpha+\beta)<0$, a naopak; píšeme-li

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{(1-x^2)\ (1-y^2)-x^2y^2}{\sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2}+xy}$$
$$=\frac{1-(x^2+y^2)}{\sqrt{(1-x^2)\ (1-y^2)}+xy},$$

vidíme, že při $1>x^2+y^2$ jest $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ a že pak z (17) plyne

$$\alpha+\beta=\arcsin\ (x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2});$$

a že při $1<x^2+y^2$ jest $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$, a tedy $\alpha+\beta$ supplementárný úhel ostrého úhlu o témž sinu, t. j.

$$\alpha+\beta=\pi-\arcsin\ (x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2});$$

jest-li konečně $1=x^2+y^2$, tu $\cos(\alpha+\beta)=0$ a $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

Máme tedy při kladných x, y a
při $1>x^2+y^2$:

$$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}),$$

při $1<x^2+y^2$:

$$\arcsin x+\arcsin y=\pi-\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}),$$

při $1=x^2+y^2$:

$$\arcsin x+\arcsin y=\frac{\pi}{2}.$$

Obdobně vyjádříme součet dvou kladných arc tg:

$$\operatorname{arc\,tg} x=\alpha>0,\quad \text{a tedy}\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc\,tg} y=\beta>0,\quad \text{a tedy}\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2};$$

zde

$$\operatorname{tg}\alpha=x,\quad \operatorname{tg}\beta=y,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{x+y}{1-xy}. \tag{18}$$

Při $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ jest tato tangenta kladná, tedy $1>xy$, a pak soudíme z (18)

$$\alpha+\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy};$$

při $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$ jest ona tangenta záporná, tedy $1<xy$, a pak

z (18) soudíme, že tupý úhel $\alpha + \beta$ jest součet z π a z ostrého záporného úhlu o téže tangentě, t. j.

$$\alpha + \beta = \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy};$$

konečně při $1 = xy$ jest $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \infty$, a tedy

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Máme tedy pro dva kladné arc tg:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy} \quad \text{při } 1 > xy,$$

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy} \quad \text{při } 1 < xy,$$

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \frac{\pi}{2} \quad \text{při } 1 = xy.$$

N. p. pro $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, jest $1 > xy$, a tedy máme

$$\operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

57. Funkcionálná rovnice.

Funkce $f(x) = ax$, v níž značí a libovolnou stálou hodnotu, jest jediná spojitá funkce, neobmezeně proměnné x, hovící funkcionálné rovnici

(19) $$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Supponujme, že spojitá funkce $f(x)$ této rovnici hoví, a učiňme $y = 0$; pak máme $f(x) = f(x) + f(0)$ a tedy

(20) $$f(0) = 0.$$

Učiňme dále v (19) $y = -x$ a máme $0 = f(x) + f(-x)$, t. j.

(21) $$f(-x) = -f(x).$$

Kladouce do (19) $y + z$ místo y máme

$$f(x+y+z) = f(x) + f(y+z) = f(x) + f(y) + f(z),$$

a obecněji

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n).$$

Jsou-li hodnoty x_ν všechny rovny x, soudíme, že

(22) $$f(nx) = n f(x),$$

a pro $x = 1$, $f(n) = n f(1)$, aneb označivše $f(1)$ literou a,

(23) $$f(n) = an,$$

při čemž n značí celistvé kladné číslo; (20) a (21) však ukazují, že (23) platí také pro $n = 0$ a pro celistvé záporné n.

Učiníme-li v (22) $x = \frac{m}{n}$, kde m, n jsou celistvá čísla a n mimo to kladné, máme

$$f(m) = n f\left(\frac{m}{n}\right), \quad \text{t. j.} \quad am = n f\left(\frac{m}{n}\right),$$

a tedy

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a\frac{m}{n},$$

z čehož patrno, že platí $f(x) = ax$ pro každé racionálné x.

Jest-li x irracionálné a dáno konvergující posloupností racionálných čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots$, vymáhá supponovaná spojitost funkce $f(x)$, aby platila rovnost

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim (ax_n) = a \lim x_n = ax.$$

Jest tedy pro každé reálné x

$$f(x) = ax.$$

Funkce $f(x) = a^x$, kde a značí libovolnou kladnou stálou, jest jediná spojitá funkce, jejíž hodnoty hoví funkcionálné rovnici *)

(24) $$f(x + y) = f(x) f(y).$$

Supponujme, že spojitá funkce $f(x)$ hoví této rovnici, a položme v ní $y = 0$; tím obdržíme

$$f(x) = f(x) f(0) \quad \text{čili} \quad f(x)[f(0) - 1] = 0,$$

a tedy buď $f(0) = 1$, aneb $f(x) = 0$, kterouž druhou, zcela nezajímavou možnost vyloučíme, tak že máme $f(0) = 1$.

Z (24) soudíme nyní

$$f(x - x) = f(x) f(-x) \quad \text{čili} \quad 1 = f(x) f(-x),$$

a tedy

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Z (24) soudíme dále

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n),$$

a tedy speciálně pro celistvé kladné n,

$$f(nx) = [f(x)]^n.$$

Vzhledem k $f(0) = 1$ a vzhledem k supponované spojitosti funkce $f(x)$ jest pro kladné dosti malé h také $f(h)$ kladná hodnota (čl. 42.), a tedy

$$f(nh) = [f(h)]^n$$

---

*) *Cauchy*, l. c. pag. 106.

také kladná hodnota. Pro dosti velké celistvé n přesáhne ale nh libovolné číslo, z čehož patrno, že $f(x) > 0$ pro každé kladné x, a vzhledem k (25) také pro každé záporné x, t. j. $f(x)$ nabývá jen kladných hodnot. Možno tedy $f(x)$ logarithmovati a položiti

$$\log f(x) = \varphi(x);$$

$\varphi(x)$ pak bude dle čl. 41. funkcí spojitou a bude hověti funkcionálné rovnici

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \log [f(x) f(y)] = \log f(x + y) = \varphi(x + y),$$

z níž soudíme, že

$$\varphi(x) = cx, \quad \text{t. j.} \quad \log f(x) = cx,$$

a tedy

$$f(x) = e^{cx} = a^x,$$

značíme-li kladné číslo e^c literou a.

Kapitola IV.

Derivace a differenciály funkcí jedné proměnné.

58. **Veličiny infinitesimálné, t. j. nekonečně malé a nekonečně velké.**

Veličinu x nazýváme nekonečně malou, jest-li x *proměnná*, jejíž limita jest nulla. Určitá, sebe menší hodnota, není tedy nekonečně malá, poněvadž není proměnná; tak n. p. nulla není nekonečně malou hodnotou.

Veličinu x nazýváme nekonečně velkou, jest-li x *proměnná*, jejíž limita jest $\pm\infty$, tedy proměnná rostoucí číselně nad každé číslo.

N. p. $\sin x$ jest nekonečně malá veličina pro případ, že $\lim x = 0$, neboť pak $\lim \sin x = 0$. Nekonečně velkou veličinou jest n. p. $\operatorname{cotg} x$ pro $\lim x = 0$.

Jest-li $\lim x = \pm\infty$, jest $\lim \frac{1}{x} = 0$ a naopak, t. j. reciproká hodnota nekonečně malé jest nekonečně velká a naopak.

Pojednává se často o nekonečně malých hodnotách různých stupňů, a to následujícím způsobem.

Budiž α nekonečně malá veličina a budiž β funkce její a s. taková, že se s α stává zároveň nekonečně malou; podíl $\frac{\beta}{\alpha}$ jest proměnný a také na α závislý. Platí-li pro $\lim \alpha = 0$:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k,$$

kde k jest konečné číslo různé od nully, pravíme, že β jest nekonečně malou veličinou téhož stupně jako α. Pokládáme-li α za základní nekonečně malou hodnotu, připisujíce jí stupeň první, nazýváme pak i β nekonečně malou hodnotou stupně prvního.

Dle definice limity se stává rozdíl $\frac{\beta}{\alpha} - k$ číselně libovolně malým pro dosti malé $|\alpha|$, tak že

$$\frac{\beta}{\alpha} = k + \varepsilon, \quad \text{kde při } \lim \alpha = 0 \text{ platí } \lim \varepsilon = 0,$$

a tedy

$$\beta = \alpha (k + \varepsilon);$$

toť obecný výraz nekonečně malé veličiny prvního stupně; část jeho αk nazývá se hlavní částí veličiny β.

Závisí-li β opět na α tak, že při $\lim \alpha = 0$ jest též $\lim \beta = 0$ a jest-li podíl $\frac{\beta}{\alpha}$ nekonečně malá veličina prvního stupně, pravíme, že β jest nekonečně malá veličina druhého stupně; pak tedy platí

$$\frac{\beta}{\alpha} = \alpha (k + \varepsilon), \quad k \gtrless 0, \quad \lim \varepsilon = 0,$$

a jest

$$\beta = \alpha^2 (k + \varepsilon)$$

obecný tvar nekonečně malé veličiny druhého stupně.

Obecně pravíme, že β jest nekonečné malá veličina n-ho stupně, jest-li podíl $\frac{\beta}{\alpha}$ nekonečně malý $n - 1$-ho stupně; z toho snadno vychází, že

$$\beta = \alpha^n (k + \varepsilon), \quad \lim \varepsilon = 0, \quad k \gtrless 0.$$

Zde jest n ovšem kladné celistvé číslo, a patrně pro $\lim \alpha = 0$:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = k \gtrless 0.$$

Platí-li tato rovnost při kladném, jinak libovolném n, pravíme, že β jest nekonečné malé stupně n.

N. p. $\sin \alpha$ jest nekonečně malá veličina prvního stupně, jelikož $\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ pro $\lim \alpha = 0$.

Veličina $1 - \cos \alpha$ jest nekonečně malá druhého stupně, poněvadž

$$\lim \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} = \lim \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}$$

$$= \lim \left(\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1}{2}.$$

59. Dvě zásady o veličinách infinitesimálných.

Nekonečně malé veličiny intervenují v našich úvahách dvojím způsobem: buď jde o stanovení nějaké neznámé hodnoty jakožto limity podílu dvou nekonečně malých hodnot — stanovisko počtu differenciálného — aneb jde o stanovení limity součtu nekonečně mnoha sčítanců nekonečně malých, což se děje v počtu integrálném.

Řešení těchto dvou úkolů se obyčejně opírá o následující dvě věty.

I. *Limita podílu dvou nekonečně malých veličin se rovná limitě jiných dvou nekonečně malých veličin, mají-li tyto s původními podíly o limitě* 1.

Buďte α, β dvě nekonečně malé veličiny, o jichž podíl jde, α', β' pak dvě jiné nekonečně malé veličiny, o nichž předpokládáme, že

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1, \quad \lim \frac{\beta'}{\beta} = 1;$$

pak

$$\alpha' = \alpha(1 + \varepsilon), \quad \beta' = \beta(1 + \eta),$$

kde $\lim \varepsilon = 0$, $\lim \eta = 0$, a tedy

$$\lim \frac{\beta'}{\alpha'} = \lim \frac{\beta(1 + \eta)}{\alpha(1 + \varepsilon)} = \lim \frac{\beta}{\alpha} \cdot \lim \frac{1 + \eta}{1 + \varepsilon} = \lim \frac{\beta}{\alpha},$$

jak bylo dokázati.

II. *Jsou-li*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$$

kladné hodnoty proměnné, jichž počet m *roste do nekonečna a jež se současně stávají nekonečně malými, a platí-li*

$$\lim_{\lim m = \infty} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m) = S,$$

tu se tato limita nezmění, nahradíme-li α_ν *jinou nekonečně malou veličinou* β_ν *hovící požadavku* $\lim \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} = 1$.

Ze supposice

$$\lim \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} = 1$$

soudíme, že

$$\beta_\nu = \alpha_\nu (1 + \varepsilon_\nu), \quad \lim \varepsilon_\nu = 0,$$

a tedy

$$\sum_1^m \beta_\nu = \sum_1^m \alpha_\nu + \sum_1^m \alpha_\nu \varepsilon_\nu,$$

$$\lim \sum_1^m \beta_\nu = \lim \sum_1^m \alpha_\nu + \lim \sum_1^m \alpha_\nu \varepsilon_\nu, \quad \text{pro } \lim m = \infty.$$

Značíme-li ε onu z hodnot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$, jež má největší číselný obnos, platí patrně

$$| \Sigma \alpha_\nu \varepsilon_\nu | \leqq | \varepsilon | \Sigma \alpha_\nu,$$

a jelikož $\lim \Sigma \alpha_\nu = S$ jest konečný a $\lim \varepsilon = 0$, máme

$$\lim \Sigma \alpha_\nu \varepsilon_\nu = 0,$$

a tedy

$$\lim \Sigma \beta_\nu = \lim \Sigma \alpha_\nu,$$

jak bylo dokázati.

Jakožto applikaci věty I. stanovme $\lim \frac{\sin mx}{\sin nx}$ pro $\lim x = 0$. Dle čl. 54. platí

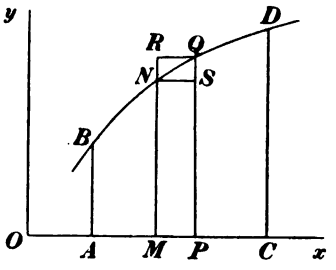
$$\lim \frac{\sin mx}{mx} = 1, \quad \lim \frac{\sin nx}{nx} = 1,$$

a tedy dle oné věty

$$\lim \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

Věty II. užijme ku stanovení plochy omezené následujícím způsobem.

Budiž $f(x)$ funkce v intervallu $(x_0 \ldots x_1)$ spojitá, rostoucí a kladná a vytkněme si čáru BD (obr. 3.), jejíž rovnice vzhledem k pravoúhlým osám souřadným jest $y = f(x)$; čára ta s osou Ox a s pořadnicemi $AB = f(x_0)$, $CD = f(x_1)$, příslušnými úsečkám $x_0 = OA$, $x_1 = OC$, uzavírá plochu ABDC, již označíme Π.



Obr. 3.

Rozdělíme-li délku $AC = x_1 - x_0$ na m dílců, z nichž jeden jest MP, a vedeme-li dělícími body pořadnice dané čáry, jeví se plocha Π jakožto součet ploch $\alpha_\nu = MNQP$, z nichž každá při $\lim m = \infty$ se blíží nulle, tedy

$$\Pi = \lim_{m = \infty} \sum_1^m \alpha_\nu.$$

Stanovení jednotlivých ploch α_ν jest stejně obtížné jako stanovení celé plochy Π; za pomoci věty II. můžeme však plochy α_ν nahraditi obdélníky a tím vyčíslení plochy Π podstatně usnadniti. Označíme-li totiž plochy obdélníků MNSP a MRQP, resp. β_ν a γ_ν, máme patrně

$$\beta_\nu < \alpha_\nu < \gamma_\nu,$$

a dělivše β_ν

$$1 < \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} < \frac{\gamma_\nu}{\beta_\nu},$$

t. j.

$$1 < \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} < \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{MN}}.$$

S rostoucím m se však dílce $h = \mathrm{MP}$ stávají libovolně malé a vzhledem k spojitosti funkce $f(x)$ se také rozdíl $\mathrm{PQ} - \mathrm{MN} = f(x+h) - f(x)$, kde x značí úsečku OM, stává libovolně malým, a tedy jest také podíl

$$\frac{\mathrm{PQ} - \mathrm{MN}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{MN}} - 1$$

libovolně malý, t. j. $\lim \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{MN}} = 1$.

Podíl $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ sevřený číslem 1 a podílem $\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{MN}}$ má tudíž také 1 za limitu. Obdobně by plynulo, že $\frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}$ má 1 za limitu.

Dle věty II. nyní soudíme, že hledaná plocha

$$\Pi = \lim \sum_1^m \beta_\nu = \lim \sum_1^m \gamma_\nu \quad \text{pro } \lim m = \infty.$$

Jest tedy limita součtu obdélníků MNSP *táž jako limita součtu obdélníků* MRQP, *a ovšem obě limity rovny ploše* Π.

Jest-li n. p. stanoviti plochu Π omezenou parabolou $x^2 = 2py$, osou Ox a pořadnicemi úsečkám $x_0 = 0$ a $x_1 = a$ příslušnými, rozdělme $x_1 - x_0 = a$ na m stejných dílů $h = \frac{a}{m}$ a počítejme Π dle formule

$$\Pi = \lim \sum_1^m \beta_\nu = \lim \Sigma \mathrm{MNSP}.$$

Je-li $\mathrm{OM} = (\nu - 1)\,h$, jest

$$\mathrm{MN} = \frac{\overline{\mathrm{OM}}^2}{2p} = \frac{(\nu-1)^2\,h^2}{2p},$$

$$\beta_\nu = \text{MNSP} = h \,.\, \text{MN} = \frac{(\nu-1)^2}{2p} \,.\, h^3 = \frac{(\nu-1)^2 a^3}{2p\, m^3},$$

$$\Pi = \lim_{m=\infty} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{a^3}{2p} \frac{(\nu-1)^2}{m^3} = \frac{a^3}{2p} \lim \left(\frac{1}{m^3} \sum_{1}^{m} (\nu-1)^2 \right).$$

Avšak

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (m-1)^2 = \frac{m(m-1)(2m-1)}{6},$$

a tedy $$\Pi = \frac{a^3}{2p} \cdot \frac{1}{6} \lim_{m=\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(2 - \frac{1}{m}\right) \right] = \frac{a^3}{6p},$$

t. j. plocha Π se rovná $\frac{1}{3}ab$, značí-li b pořadnici paraboly příslušnou úsečce a.

60. Derivace funkce.

Má-li podíl z přírůstu funkce a z přírůstu proměnné určitou limitu pro případ, že se přírůst proměnné blíží nulle, nazýváme tuto limitu *derivací* funkce.

Klademe-li přírůst proměnné $\Delta x = h$, jest přírůst funkce

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

a $$\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ pro } \lim h = 0$$

derivace funkce $f(x)$, ač-li tento limes existuje; derivace ta obecně opět závisí na x a označují se symbolem $f'(x)$.

Jest-li n. p.

$$f(x) = x^2,$$

jest

$$\Delta f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

a

$$f'(x) = \lim \frac{2xh + h^2}{h} = \lim (2x + h) = 2x.$$

Funkce, která má určitou, konečnou derivaci, jest nutně spojitá pro hodnotu x; neboť z rovnosti

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

kde $f'(x)$ jest konečná hodnota, plyne

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon, \quad |h| < \eta,$$

kde ε jest libovolně malé kladné číslo, a stává se tedy rozdíl

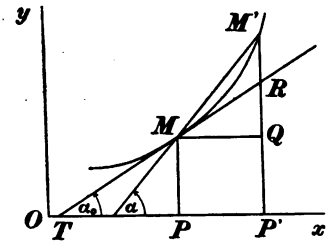
$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)\pm\vartheta\varepsilon,\quad 0<\vartheta<1$$

číselně libovolně malým, pro dosti malé $|h|$.

Spojitost funkce však nemá za následek existenci derivace; jakož první *Weierstrass* ukázal, možno sestrojiti funkce veskrze spojité, které nemají derivace pro žádnou hodnotu proměnné*).

Elementárné funkce, o nichž pojednáno v předchozí kapitole a jež tvoří náš početní materiál, mají derivace a totéž platí o funkcích z nich odvozených početními úkony applikovanými v konečném počtu, jakož ihned shledáme.

K základnímu pojmu derivace byli vynálezci infinitesimálného počtu *Newton* a *Leibnitz* vedeni t. z. problémem tečen. — Znázorníme-li funkci $f(x)$ čarou (obr. 4.), jejíž rovnice vzhledem k pravoúhlým osám souřadným jest



Obr. 4.

$$y=f(x),$$

jest směrnice sečny, spojující bod $M(x, y)$ s jiným bodem čáry $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{QM'}{MQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

značíme-li opět přírůst Δx literou h. Má-li $f(x)$ derivaci, má čára v bodě M tečnu; výraz ten má totiž pak pro $\lim h=0$ za limitu trigonometrickou tangentu úhlu α_0, který svírá s kladnou osou x přímka, které se s libovolnou přesností přibližuje sečna MM' pro případ, že se bod M' na čáře blíží bodu M, a přímka ta sluje tečnou čáry v bodě M.

Jest tedy derivace $f'(x)$ směrnicí tečny čáry $y=f(x)$ v bodě (x, y). Stanovení tečny jest totožno se stanovením derivace $f'(x)$.

61. Pojem differenciálu.

Jest-li $f(x)$ spojitá funkce mající derivaci, tu z rovnice

$$\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),\quad(\lim h=0),$$

*) *Weierstrass*, Crelle-Borchardt-ův Journal, t. LXXIX, p. 30, aneb Abhandlungen aus der Functionenlehre, Berlin 1886, p. 97.

soudíme, že můžeme psáti

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon, \quad \text{kde } \lim \varepsilon = 0,$$

z čehož

$$\Delta f(x) = f'(x)h + \varepsilon h.$$

Přírůst funkce se tedy skládá ze dvou částí, z nichž jedna jest součin z derivace a z přírůstu proměnné, druhá součin z tohoto přírůstu a z veličiny ε, stávající se s ním současně nekonečně malou.

První tato část, t. j. *součin z derivace a z přírůstu proměnné sluje differenciálem funkce a označuje se* $df(x)$; klademe tedy

$$df(x) = f'(x)h,$$

a máme pro přírůst funkce výraz

$$\Delta f(x) = df(x) + \varepsilon h.$$

Pro speciálný případ, že

$$f(x) = x,$$

máme

$$f'(x) = \lim \frac{x+h-x}{h} = 1,$$

$$df(x) = f'(x)h = h, \quad \text{t. j.} \quad dx = h;$$

jest tedy differenciál neodvisle proměnné prostě přírůst její, a ovšem zcela libovolný.

Píšíce dx místo h, máme nyní pro obecnou funkci $f(x)$

$$df(x) = f'(x)\,dx,$$

t. j. differenciál funkce jest součin z její derivace a z differenciálu proměnné, a

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

t. j. derivace funkce jest podíl z jejího differenciálu a z differenciálu proměnné; vzhledem k tomu se nazývá derivace také *differenciálným podílem.*

Označujeme-li $f(x)$ jednou literou, n. p. y, píšeme dy místo $df(x)$ a tedy $\frac{dy}{dx}$ místo $f'(x)$, čtouce: derivace y podle x.

Znázorníme-li (obr. 4.) $f(x)$ čarou, jejíž rovnice v pravoúhlých souřadnicích jest

$$y = f(x).$$

a vytkneme-li bod její M o souřadnicích x, y, jest při $dx = \mathrm{PP'}$ patrně přírůst funkce

$$\Delta y = \Delta f(x) = \mathrm{P'M'} - \mathrm{PM} = \mathrm{QM'},$$

kdežto differenciál její jest

$$dy = df(x) = f'(x) \,.\, dx = \operatorname{tg} \alpha_0 \,.\, \mathrm{PP'} = \mathrm{QR}.$$

Jest tedy přírůst funkce přírůstem pořadnice čáry, a differenciál funkce přírůstem pořadnice tečny.

Vzhledem k předchozí úvaze možno differenciály proměnné a funkce t. dx a $df(x)$ definovati jako dvě hodnoty hovící požadavku, aby jich podíl $\frac{df(x)}{dx}$ se rovnal derivaci $f'(x)$, ale jinak zcela libovolné; možno tedy jednu z nich, n. p. dx, voliti libovolně a druhou dle tohoto požadavku vypočísti.

Jest-li přírůst Δx neodvisle proměnné nekonečně malý, jest také přírůst funkce $\Delta f(x)$ i differenciál její $df(x)$ nekonečně malý a s. téhož stupně, je-li derivace $f'(x)$ různá od nully, neboť pak

$$\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) \gtrless 0, \quad \lim \frac{df(x)}{dx} = \lim \frac{f'(x)\,dx}{dx} = f'(x) \gtrless 0;$$

a v příčině úkolů v čl. 58. naznačených možno pak přírůst zaměniti differenciálem funkce, poněvadž limita jich podílu jest 1,

$$\lim \frac{\Delta f(x)}{df(x)} = \lim \frac{f'(x)\,dx + \varepsilon dx}{f'(x)\,dx} = 1 + \frac{1}{f'(x)} \lim \varepsilon = 1.$$

62. **Derivace a differenciál součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí.**

Budiž dán součet dvou funkcí proměnné x

$$y = f(x) + \varphi(x),$$

jichž derivace jsou $f'(x)$, $\varphi'(x)$; pak pro hodnotu $x + \Delta x$ nabýváme

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) + \varphi(x + \Delta x),$$

a odečtením a dělíme-li přírůstem Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Stává-li se Δx nekonečně malou veličinou, máme

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x) + \varphi'(x),$$

$$dy = f'(x)\,dx + \varphi'(x)\,dx = df(x) + d\varphi(x),$$

t. j. derivace součtu jest součet derivací sčítanců, a differenciál součtů jest součet differenciálů sčítanců.

Obdobné pravidlo platí pro differencování rozdílu, a obecněji pro differencování algebraického součtu několika funkcí. Máme-li n. p. výraz

$$y = u + v - w,$$

kde u, v, w jsou funkce proměnné x mající derivace, obdržíme pro hodnotu $x + \Delta x$ proměnné

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (w + \Delta w),$$

a odečtením

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

z čehož pro $\lim \Delta x = 0$,

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx},$$

$$(1) \qquad dy = d(u + v - w) = du + dv - dw.$$

t. j. *derivace resp. differenciál algebraického součtu více funkcí se rovná algebraickému součtu jich derivací, resp. differenciálů.*

Redukuje-li se funkce na stálou hodnotu $f(x) = c$, jest $\Delta f(x) = 0$, $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 0$, a tedy také limes tohoto podílu $f'(x) = 0$,

t. j. *derivace a tedy i differenciál stále jest* 0.

Máme-li součet ze stálé c a funkce $f(x)$

$$y = c + f(x),$$

jest tedy

$$dy = df(x),$$

t. j. additivní stálá differencováním odpadá.

Mějme součin dvou funkcí

$$y = uv,$$

jež mají derivace; zde pro hodnotu $x + \Delta x$ proměnné máme

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

a odečtením

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Pro $\lim \Delta x = 0$ plyne

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

$$dy = d(uv) = udv + vdu, \tag{2}$$

t. j. *differenciál součinu dvou funkcí jest součet součinů z každé funkce a z differenciálu druhé.*

Jest-li jeden faktor stálý, tedy

$$y = au,$$

máme $da = 0$ a tedy

$$dy = d(au) = a\,du, \quad \frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx},$$

t. j. multiplikativná stálá se při differencování neb derivování reprodukuje.

Dělíme-li (2) součinem uv, obdržíme tuto formuli ve tvaru

$$\frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v},$$

t. j. logarithmický differenciál součinu se rovná součtu logarithmických differenciálů součinitelův, označujeme-li obecně $\frac{df(x)}{f(x)}$ jakožto logarithmický differenciál funkce $f(x)$.

Věta ta platí pro libovolný počet součinitelů, neboť

$$\frac{d(u_1u_2\,..\,u_n)}{u_1u_2\,..\,u_n} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{d(u_2\,..\,u_n)}{u_2\,..\,u_n} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2}$$
$$+ \frac{d(u_3\,..\,u_n)}{u_3\,..\,u_n} = \,..\, = \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \,..\, + \frac{du_n}{u_n}.$$

Odtud

$$d(u_1u_2\,..\,u_n) = u_2u_3\,..\,u_n du_1 + u_1u_3\,..\,u_n du_2 + \,..$$
$$+ u_1u_2\,..\,u_{n-1}du_n,$$

t. j. součin differencujeme, differencujeme-li každého součinitele, násobíme-li jeho differenciál ostatními součiniteli a sečteme-li všecky tyto součiny.

Jsou-li všecky součinitele sobě rovny a s. u, soudíme z předposlední formule, že

$$\frac{d(u^n)}{u^n} = n\frac{du}{u}, \quad d(u^n) = nu^{n-1}\,du, \tag{3}$$

a dělíce dx, máme *derivaci mocnosti* u^n *o celistvém, kladném exponentu*

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\,\frac{du}{dx}.$$

Jest-li speciálně $u = x$, máme

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx, \quad \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Dle předchozích pravidel možno již derivovati a differencovati každou racionálnou celistvou funkci

$$y = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n;$$

máme

$$\frac{dy}{dx} = nA_0x^{n-1} + (n-1)\,A_1x^{n-2} + (n-2)\,A_2x^{n-3} + \ldots + A_{n-1}.$$

Dán-li podíl dvou funkcí, majících derivace

$$y = \frac{u}{v}, \quad v \gtrless 0,$$

pak

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

a $$\Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)};$$

pro $\lim \Delta x = 0$ obdržíme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \tag{4}$$

t. j. *differenciál podílu jest zlomek, jehož jmenovatelem jest čtverec jmenovatele a jehož čítatelem jest součin z jmenovatele a differenciálu čítatele zmenšený o součin z čítatele a differenciálu jmenovatele daného podílu.*

Klademe-li za u a v racionálné celistvé funkce, podává (4) differenciál racionálné lomené funkce.

Jest-li speciálně $u = 1$, tedy $du = 0$, podává (4)

$$d\frac{1}{v} = -\frac{dv}{v^2}.$$

Učiníme-li $v = u^m$, máme

$$d\frac{1}{u^m} = d(u^{-m}) = -\frac{m u^{m-1}\, du}{u^{2m}} = -mu^{-m-1}\, du,$$

což ukazuje, že formule (3) má platnost i pro celistvé záporné $n = -m$.

Píšeme-li formuli (4) ve tvaru

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v},$$

vidíme, že logarithmický differenciál podílu se rovná logarithmickému differenciálu čítatele, zmenšenému o logarithmický differenciál jmenovatele.

63. Differencování funkce funkce a funkce inversní.

Budiž $y = f(u)$ a $u = \varphi(x)$, pak ovšem jest $y = f[\varphi(x)]$ funkcí x; a předpokládejme, že funkce $f(u)$ a $\varphi(x)$ mají derivaci $f'(u)$, $\varphi'(x)$. Zvětšíme-li x o Δx, a jsou-li příslušné přírůsty hodnot u a y označeny Δu, Δy, máme

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), \quad \Delta y = f(u + \Delta u) - f(u),$$

a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x};$$

pro $\lim \Delta x = 0$ jest $\lim \Delta u = 0$, a tedy i $\lim \Delta y = 0$, a

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

t. j.

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx},$$

$$dy = f'(u) \cdot \varphi'(x)\, dx = f'(u)\, du, \tag{5}$$

t. j. *differenciál funkce funkce se stanoví právě tak, jako by argument u byl neodvisle proměnnou.*

Příkladem jest formule (3).

Máme-li $y = f(x)$ a je-li i naopak $x = \varphi(y)$ funkcí proměnné y (čl. 44.), jde o stanovení derivace $\varphi'(y)$ pomocí derivace $f'(x)$.

Má-li $f(x)$ derivaci různou od nully, má i inversní funkce $\varphi(y)$ derivaci a s. jest tato reciprokou hodnotou oné.

Jsou-li totiž Δx a Δy současné přírůsty, máme

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

a tedy pro lim $\Delta x = 0$,

$$\frac{dx}{dy} = \varphi'(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)},$$

jak bylo dokázati.

Mějme n. p. $y = x^m$, tedy $x = \sqrt[m]{y} = y^{\frac{1}{m}}$; pak

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{m}\,\frac{1}{x^{m-1}} = \frac{1}{m}\,\frac{1}{\sqrt[m]{y^{m-1}}},$$

t. j.

$$\frac{d\left(y^{\frac{1}{m}}\right)}{dy} = \frac{1}{m}\,y^{\frac{1}{m}-1}, \quad d\left(y^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}\,y^{\frac{1}{m}-1}dy,$$

a formule ta dle předchozí věty platí i tenkráte, značí-li y funkci jakékoli neodvisle proměnné. Učiníme-li speciálně $y = x^n$, kde n jest celistvé číslo, máme

$$d\left(x^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{1}{m}\,x^{\frac{n}{m}-n} \cdot nx^{n-1}dx = \frac{n}{m}\,x^{\frac{n}{m}-1}dx,$$

což ukazuje, že formule (3) pro differenciál mocnosti platí pro každý racionálný exponent.

Je-li n číslo irracionálné, definované konvergující posloupností racionálných čísel $n_1, n_2, n_3, \ldots$, jest x^n číslo definované konvergující posloupností $x^{n_1}, x^{n_2}, x^{n_3}, \ldots$, a i pak platí formule (3):

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Učiníme-li totiž $f(x) = x^n$, máme

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^n - 1}{\frac{h}{x}} \cdot x^{n-1},$$

a tedy pro lim $h = 0$,

$$f'(x) = x^{n-1} \lim \frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta},$$

kde $\delta = \frac{h}{x}$ má za limitu 0. Limita na pravé straně se snadno vyčíslí z

$$\lim_{\omega = \infty} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega} = e$$

(čl. 53.); položíme-li $\omega = \frac{1}{\delta}$, máme $\lim \delta = \lim \frac{1}{\omega} = 0$, a tedy

$$\lim (1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} = e.$$

Položíme-li dále $\delta = a^{\varepsilon} - 1$, kde kladné číslo a jest basis soustavy, v níž budeme logarithmovati, máme při $\lim \varepsilon = 0$ též $\lim \delta = 0$, a $\varepsilon = \operatorname{Log}(1 + \delta)$, a tedy z poslední rovnice

$$(6) \quad \begin{cases} \operatorname{Log} e = \lim \dfrac{\operatorname{Log}(1+\delta)}{\delta} = \lim \dfrac{\varepsilon}{a^{\varepsilon} - 1}, \\ \lim \dfrac{a^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = \dfrac{1}{\operatorname{Log} e}. \end{cases}$$

Nyní

$$\frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} = \frac{a^{n \operatorname{Log}(1+\delta)} - 1}{n \operatorname{Log}(1+\delta)} \cdot \frac{n \operatorname{Log}(1+\delta)}{\delta},$$

a vzhledem k $\lim n \operatorname{Log}(1 + \delta) = 0$,

$$\lim \frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} = n \frac{1}{\operatorname{Log} e} \cdot \operatorname{Log} e = n,$$

a tedy

$$f'(x) = nx^{n-1},$$

jak bylo dokázati.

64. Derivace funkce exponenciálné a logarithmické.

Budiž a kladná hodnota a $f(x) = a^x$; pak

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h},$$

a pro $\lim h = 0$ dle formule (6)

$$f'(x) = a^x \cdot \frac{1}{\operatorname{Log} e} = a^x \log a,$$

značí-li log logarithmus přirozený; skutečně z $a = e^{\log a}$ plyne logarithmováním v soustavě o basi a

$$1 = \log a \cdot \operatorname{Log} e.$$

Pro derivování a differencování funkce exponenciálné platí tedy formule

$$(7) \qquad \frac{da^x}{dx} = a^x \log a, \quad da^x = a^x . \log a \, dx.$$

Jde-li speciálně o exponenciálnou funkci e^x — a ta se nejčastěji vyskytuje — máme

$$(8) \qquad \frac{de^x}{dx} = e^x, \quad de^x = e^x dx.$$

Budiž $f(x) = \operatorname{Log} x$, a logarithmus vzat vzhledem k základu a. Pak

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\operatorname{Log}(x+h) - \operatorname{Log} x}{h} = \frac{1}{h} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \frac{\operatorname{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}};$$

při $\lim h = 0$ jest také $\lim \frac{h}{x} = 0$, a tedy dle formule (6)

$$f'(x) = \frac{1}{x} \operatorname{Log} e = \frac{1}{x} \frac{1}{\log a},$$

t. j.

$$(9) \qquad \frac{d \operatorname{Log} x}{dx} = \frac{1}{x} \operatorname{Log} e = \frac{1}{x} \frac{1}{\log a},$$

a speciálně pro přirozený logarithmus

$$(10) \qquad \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}, \quad d \log x = \frac{dx}{x}.$$

Formule pro differencování logarithmu dostačí k odvození formulí pro differencování mocnosti při libovolném exponentu. Učiníme-li totiž

$$y = u^v,$$

kde u, v jsou funkce proměnné x, z nichž první nabývá jen kladných hodnot, tu možno psáti

$$y = (e^{\log u})^v = e^{v \log u},$$

a tedy vzhledem k čl. 62. a k formulím (8) a (10)

$$dy = e^{v \log u} d(v \log u) = e^{v \log u} \left(v \frac{du}{u} + \log u \, dv\right)$$

$$= v e^{v \log u} . e^{-\log u} du + u^v \log u \, dv$$

$$= v u^{v-1} du + u^v \log u \, dv.$$

Jest-li speciálně u stálé a rovno a, jest $du = 0$, a máme

$$da^v = a^v \log a \, dv,$$

formule pro differenciál funkce exponenciálné; a jest-li v stálé a rovno m, jest $dv = 0$, a máme

$$du^m = mu^{m-1} \, du,$$

formule pro differencování funkce mocninné, nechť jest mocnitelem jakékoli číslo.

65. **Derivace funkcí goniometrických.**

Budiž $y = \sin x$; pak pro přírůst proměnné $\Delta x = h$ jest

$$\Delta y = \sin(x + h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

a pro $\lim h = 0$ vzhledem k (čl. 54.)

$$\lim \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1, \quad \lim \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x,$$

máme

(11) $$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad d \sin x = \cos x \, dx.$$

Budiž $y = \cos x$; pak

$$\Delta y = \cos(x + h) - \cos x = -2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

a tedy pro $\lim \Delta x = 0$,

(12) $$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x, \quad d \cos x = -\sin x \, dx.$$

Ostatně plyne týž výsledek differencováním funkce $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ rovnající se $\cos x$; tím dle článku 62. obdržíme

$$d\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x\,(-dx)$$
$$= -\sin x\,dx.$$

Budiž $y = \operatorname{tg} x$; pak

$$\Delta y = \operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x = \frac{\sin(x+h-x)}{\cos x \cos(x+h)},$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin h}{h}\,\frac{1}{\cos x \cos(x+h)},$$

a pro $\lim h = 0$,

(13) $$\frac{d\operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad d\operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Budiž $y = \operatorname{cotg} x$; pak

$$\Delta y = \operatorname{cotg}(x+h) - \operatorname{cotg} x = -\frac{\sin(x+h-x)}{\sin x \sin(x+h)},$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin h}{h}\,\frac{1}{\sin x \sin(x+h)},$$

a pro $\lim h = 0$,

(14) $$\frac{d\operatorname{cotg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad d\operatorname{cotg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Formule (13) a (14) možno také odvoditi differencováním $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jakožto podílů $\frac{\sin x}{\cos x}$ a $\frac{\cos x}{\sin x}$.

Budiž $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$; pak

(15) $$dy = d\sec x = -\frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Obdobně

(16) $$d\operatorname{cosec} x = d\frac{1}{\sin x} = -\frac{d\sin x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$$

66. **Derivace funkcí cyklometrických.**

Budiž $y = \arcsin x$; pak

$$x = \sin y, \quad dx = \cos y\,dy.$$

a tedy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

kde vzhledem k $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ jest cos y hodnota kladná, t. j. odmocnina ve jmenovateli kladná. Máme tedy

$$(17) \qquad \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Budiž $y = \arccos x$; pak

$$x = \cos y, \quad dx = -\sin y \, dy.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

kde odmocnina, t. j. sin y, vzhledem k $0 \leqq y \leqq \pi$ jest opět kladná.

Tedy

$$(18) \qquad \frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Budiž $y = \operatorname{arc\,tg} x$; pak

$$x = \operatorname{tg} y, \quad dx = \frac{dy}{\cos^2 y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

t. j.

$$(19) \qquad \frac{d \operatorname{arc\,tg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Konečně plyne zcela obdobně

$$(20) \qquad \frac{d \operatorname{arc\,cotg} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}, \quad d \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Formule (18) a (20) vycházejí ostatně přímo z formulí (17) a (19); neboť dle čl. 55. platí

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad \operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x,$$

a tedy

$$d \arccos x = -d \arcsin x, \quad d \operatorname{arc\,cotg} x = -d \operatorname{arc\,tg} x.$$

Předchozí formule a věty o derivování a differencování stačí k vyčíslení derivace neb differenciálu každého výrazu, jenž jest

utvořen konečným počtem čtyř základních početních úkonů, neb úkonů mocnění, odmocňování při libovolném exponentu, neb logarithmování, neb konečně úkonů goniometrických a cyklometrických, applikovaných na proměnnou a hodnoty stálé.

Příklady:

1. $$d\log(x+\sqrt{x^2\pm m^2}) = \frac{d(x+\sqrt{x^2\pm m^2})}{x+\sqrt{x^2\pm m^2}}$$
$$= \frac{dx+\frac{1}{2}\left(x^2\pm m^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x\,dx}{x+\sqrt{x^2\pm m^2}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm m^2}}.$$

2. $$d\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}\,dx - x\,d\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. $$d\log\log x = \frac{d\log x}{\log x} = \frac{dx}{x\log x}.$$

4. $$d\log\cos x = \frac{d\cos x}{\cos x} = -\frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\operatorname{tg} x\,dx.$$

5. $$d\log\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2}dx}{\cos^2\frac{x}{2}}\,\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{dx}{\sin x}.$$

6. $$y = x^{\frac{1}{x}},\quad \log y = \frac{1}{x}\log x,$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{x}\frac{dx}{x} - \log x\frac{dx}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}dx,$$
$$dy = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)\,dx.$$

7. $$d\sqrt[3]{\sin^2 x} = d\sin^{\frac{2}{3}} x = \frac{2}{3}\sin^{-\frac{1}{3}}x\,.\cos x\,dx = \frac{2\cos x\,dx}{3\sqrt[3]{\sin x}}.$$

8. $$d\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = d\left[\frac{1}{2}\log(1-x) - \frac{1}{2}\log(1+x)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d(1-x)}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{d(1+x)}{1+x} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{1-x}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{dx}{1+x} = \frac{dx}{x^2-1}.$$

9. $de^{-\sqrt{x}} = e^{-\sqrt{x}} d(-\sqrt{x}) = -e^{-\sqrt{x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = -\frac{dx}{2\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}}$.

10. Funkce $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ jest pro všecka reálná x definována a spojitá a vždycky kladná, jen $f(0) = 0$. Její derivace $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ jest také konečná a spojitá funkce, vyjma pro $x = 0$. Pro tuto hodnotu by derivace musila býti $\lim \frac{f(h) - f(0)}{h}$ pro $\lim h = 0$, nechť se h blíží nulle hodnotami kladnými neb zápornými; avšak podíl $\frac{f(h) - f(0)}{h} = h^{-\frac{1}{3}}$ s číselně ubývajícím h číselně roste do nekonečna, a s. jest kladný při kladném a záporný při záporném h, pročež nemá $f(x)$ pro $x = 0$ konečné určité derivace.

11. Funkce

$$f(x) = x \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$$

jest spojitá pro každé x, klademe-li $f(0) = 0$. Pro $\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ při $x = 0$ nalezneme 1, jest-li nekonečně malý přírůst Δx kladný, a -1, jest-li záporný. Nemá tedy podíl $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ pro $\lim \Delta x = 0$ při $x = 0$ určité limity, a tudíž nemá daná funkce pro $x = 0$ derivace.

67. **Derivování nekonečné řady.**

Dána-li řada

$$F(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots, \tag{21}$$

jejíž členy jsou funkce x, mající v jistém intervallu derivace, a konverguje-li řada

$$f'_0(x) + f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots, \tag{22}$$

vznikající derivováním jednotlivých členů, stejnoměrně v uvažovaném intervallu, tu jest součet řady (21) *funkcí x, mající derivaci v tomto intervallu, a derivace ta $F'(x)$ jest součtem řady* (22).

Jsou-li x a $x + h$ dvě libovolné hodnoty intervallu, máme

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f_0(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} + \ldots + \frac{f_{n-1}(x+h)-f_{n-1}(x)}{h} + R_n,$$

značí-li R_n zbytek nekonečné, konvergující řady

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_\nu(x+h)-f_\nu(x)}{h}, \tag{23}$$

následující po jejím n-tém členu.

Označíme-li $r_n(x)$ zbytek řady (22) též po n-tém jejím členu následující, možno pro libovolné kladné ε udati takové N, že při $n \geqq N$ platí nerovnost $| r_n(x) | < \varepsilon$ pro každé x intervallu.

Dále máme

$$R_n - R_{n+p} = \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} + \frac{f_{n+1}(x+h)-f_{n+1}(x)}{h} + \ldots + \frac{f_{n+p-1}(x+h)-f_{n+p-1}(x)}{h},$$

aneb

$$R_n - R_{n+p} = \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \varphi'(x+\vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

píšeme-li na okamžik $\varphi(x)$ místo $f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p-1}(x)$; máme tedy

$$R_n - R_{n+p} = f'_n(x+\vartheta h) + f'_{n+1}(x+\vartheta h) + \ldots + f'_{n+p-1}(x+\vartheta h),$$

t. j.

$$R_n - R_{n+p} = r_n(x+\vartheta h) - r_{n+p}(x+\vartheta h),$$

a odtud

$$R_n = R_{n+p} + r_n(x+\vartheta h) - r_{n+p}(x+\vartheta h).$$

Nechť nyní p roste do nekonečna; při tom R_n se nemění, $r_n(x+\vartheta h)$ se sice může měniti, poněvadž ϑ závisí na p, však jest stále číselně $< \varepsilon$; poněvadž R_{n+p} a $r_{n+p}(x+\vartheta h)$ mají pro $p = \infty$ za limitu nullu, soudíme z poslední rovnice, že $| R_n | \leqq \varepsilon$, a to pro každé x a $x + h$ intervallu při $n \geqq N$. Jest tedy řada (23) stejnoměrně konvergentní, pokládáme-li její členy za funkce h. a to pro intervall $(- | h | \ldots + | h |)$; a tudíž jest řada ta spojitou funkcí proměnné h (čl. 45.), nabývající tedy pro $h = 0$ určité hodnoty, totiž $\lim \frac{F(x+h)-F(x')}{h}$ pro $\lim h = 0$. Má

tedy $F(x)$ derivaci, a s. jest tato derivace

$$F'(x') = f'_0(x) + f'_1(x) + f''_1(x) + \ldots$$

Možno totiž dokázati větu*):

Jsou-li členy řady funkce proměnné x, mající pro lim $x = x_0$ (neb ∞) *určité limity, a konverguje-li řada v intervallu obsahujícím* x_0 *stejnoměrně, tu limita součtu řady se rovná součtu limit jednotlivých členů.*

Budiž

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

daná řada, s_n součet prvních n členů její, s její součet, a r_n její zbytek po n-tém členu počínající; tyto tři hodnoty jsou ovšem funkce x. Označme dále a_0, a_1, a_2, .. limity členů řady pro případ, že lim $x = x_0$ (neb ∞), a literou σ_n součet $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$.

Řada

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

konverguje a její součet jest limita součtu dané řady.

Abychom to ukázali, vytkněme k libovolnému kladnému ε takové N, že při $n > N$ platí $| r_n | < \varepsilon$ pro každé uvažované x, věc možná vzhledem k supponované stejnoměrné konvergenci řady Σu. Poněvadž pro každý větší index ovšem také $| r_{n+p} | < \varepsilon$, máme

$$| r_n - r_{n+p} | < 2\varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad | u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1} | < 2\varepsilon.$$

Konverguje-li x k hodnotě x_0 (aneb k ∞), má levá strana (čl. 13.) jistou limitu, nepřesahující 2ε, t. j.

$$| a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p-1} | \leqq 2\varepsilon,$$

čímž dokázáno, že řada $\sum_0^\infty a_\nu$ konverguje a že její součet σ jest obsažen mezi $\sigma_n + 2\varepsilon$ a $\sigma_n - 2\varepsilon$.

Budiž nyní α libovolné kladné číslo a položme $\alpha = 3\varepsilon + \varepsilon'$, kde $\varepsilon, \varepsilon'$ značí též kladná čísla. Stanovme takové N, že při $n > N$ platí $| r_n | < \varepsilon$ čili $| s - s_n | < \varepsilon$; dále stanovme kladné h takové, že při $| x - x_0 | < h$ (resp. při $x > h$) platí $| s_n - \sigma_n | < \varepsilon'$, věc možná vzhledem k lim $s_n = \sigma_n$ při lim $x = x_0$. Dle předchozí

*) *Genocchi-Peano*, l. c. pag. 98.

úvahy máme $| \sigma - \sigma_n | < 2\varepsilon$, a tedy

$$| s_n - \sigma_n - (\sigma - \sigma_n) + s - s_n | < \varepsilon' + 2\varepsilon + \varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad | s - \sigma | < \alpha.$$

K libovolnému kladnému α možno tedy vytknouti kladné h takové, že pro každé x různící se od x_0 o méně než h (resp. pro $x > h$) platí $| s - \sigma | < \alpha$; má tedy s za limitu σ pro lim $x = x_0$ resp. $= \infty$, jakož bylo dokázati.

Pro případ, kdy lim x jest konečné číslo x_0, vychází správnost dokázané věty ihned. Možno totiž vzhledem k lim $u_\nu = a_\nu$ funkce u_ν prohlásiti za spojité v uvažovaném intervallu, a nabývající hodnot a_ν pro $x = x_0$; jest tedy řada Σu_ν dle čl. 45. také spojitou funkcí a tudíž jest limita součtu jejího pro lim $x = x_0$ rovna součtu Σa_ν, jakož věta tvrdí.

Z řady mocninné n. p.

$$F(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

vzniká derivováním jednotlivých členů řada geometrická

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

o podílu $-x^2$, a tedy stejnoměrně konvergující v každém intervallu $(-a \ldots + a)$, kde kladné $a < 1$. Máme tedy při $| x | < 1$

$$F'(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

a poněvadž má arc tg x touž derivaci, jest rozdíl $F(x) -$ arctg x stálý (čl. 68.) a vzhledem k $F(0) = 0$, arc tg $0 = 0$ jest tento rozdíl 0, t. j. při $| x | < 1$ platí rozvoj

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

68. **Věty o derivaci.**

O funkci $f(x)$ pravíme, že v místě $x = x_0$ stoupá (roste), je-li pro dosti malé $| h |$ její přírůst $f(x_0 + h) - f(x_0)$ téhož znamení jako h, a že klesá, je-li opáčného znamení.

Jest-li derivace kladná, tu funkce stoupá, a jest-li záporná, funkce klesá.

Z $$\lim_{h=0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

soudíme, že

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h\,[f'(x_0) + \varepsilon],$$

kde ε jest současně s h nekonečně malé. Není-li derivace $f'(x_0)$ nullou, bude pro dosti malé $|\,h\,|$ hodnota ε číselně menší než $f'(x_0)$, a tedy $f'(x_0) + \varepsilon$ téhož znamení, které má $f'(x_0)$. Poslední rovnost tedy ukazuje, že $f(x_0 + h) - f(x_0)$ při $f'(x_0) > 0$ jest téhož znamení jako h, a při $f'(x_0) < 0$ opáčného.

Jest-li $f(x)$ funkce daná v intervallu $(a\,..\,b)$, mající pro všecky jeho hodnoty x konečnou derivaci, a platí-li $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, tu existuje v intervallu hodnota x_1 $(a < x_1 < b)$, pro niž derivace $f'(x)$ vymizí.

Jest-li speciálně $f(x) = 0$ pro všecky hodnoty x intervallu, pak platí pro ně stále $f'(x) = 0$. Obecně však nabude $f(x)$ hodnot různých od nully. Nabývá-li hodnot kladných, uvažujme horní mez jejich (čl. 38.), které funkce pro jistou hodnotu x_1 uvnitř intervallu dosáhne, jelikož jest nutně spojitá (čl. 42. a 60.). Rozdíl $f(x_1 + h) - f(x_1)$ jest pak při každém h záporný neb 0; značí-li tedy k kladnou veličinu, jest $\dfrac{f(x_1 - k) - f(x_1)}{-k}$ kladný neb 0, a $\dfrac{f(x_1 + k) - f(x_1)}{k}$ záporný neb 0. Oba podíly mají dle supposice při $\lim k = 0$ touž limitu, totiž $f'(x_1)$, pročež $f'(x_1) = 0$.

Nabývá-li $f(x)$ jen záporných hodnot, vede jich dolní mez opět k důkazu věty, jež sluje větou *Rolle*-ovou.

Má-li funkce $f(x)$ pro všecky hodnoty x intervallu $(a\,..\,b)$ konečnou derivaci, platí rovnost

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1),$$

kde x_1 značí hodnotu mezi a a b.

Abychom větu dokázali, uvažujme funkci

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{x - a}{b - a}\Big[f(b) - f(a)\Big];$$

tato funkce při $x = a$ a $x = b$ vymizí, a má pro všecky x intervallu $(a\,..\,b)$ konečnou derivaci, totiž

$$F'(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dle předešlé věty existuje tedy mezi a a b hodnota x_1, pro niž tato derivace vymizí, t. j. $F'(x_1) = 0$, čili

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

jak bylo dokázati.

Položíme-li $b = a + h$, možno každou hodnotu x_1 mezi a a b psáti ve tvaru $a + \vartheta h$, kde ϑ jest mezi 0 a 1, a tedy větě dáti tvar

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

v němž se jí zhusta užívá. Platnost této formule závisí na supposici, že $f(x)$ má pro všecky hodnoty x od a do $a + h$ konečnou derivaci.

Geometricky ji můžeme snadno znázorniti pomocí čáry, jejíž rovnice v pravoúhlých souřadnicích jest $y = f(x)$. Učiníme-li (obr. 5.)

$$OA = a, \quad OB = b,$$
$$AB = b - a = h,$$

jest

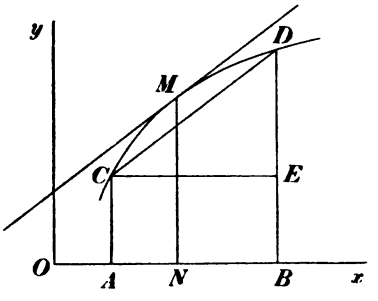
$$AC = f(a), \quad BD = f(b),$$
$$DE = f(b) - f(a) = h \operatorname{tg} DCE.$$

Rovnice

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \vartheta h),$$

tedy praví, že

$$\operatorname{tg} DCE = f'(a + \vartheta h)$$



Obr. 5.

t. j. že se na čáře CD nalézá bod M, v němž tečna MT jest rovnoběžna se spojnicí CD.

Tuto důležitou *formuli o přírůstu funkce* č. *větu o střední hodnotě* možno zobecniti. Buďte $f(x)$ a $\varphi(x)$ dvě funkce mající v intervallu $(a \ldots b)$ konečnou derivaci, a supponujme, že $\varphi'(x)$ pro žádné x *uvnitř* intervallu nevymizí, ač na krajích $x = a$ a $x = b$ může vymizeti. Uvažujme funkci

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} [\varphi(x) - \varphi(a)];$$

patrně $F(a) = 0$, $F(b) = 0$, a mimo to má $F(x)$ v intervallu konečnou derivaci

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(x).$$

Tedy existuje uvnitř intervallu hodnota x_1 annullující $F'(x)$, t. j. činící

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(x_1).$$

Vzhledem k $\varphi'(x_1) \gtrless 0$ možno touto hodnotou děliti, čímž

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}$$

čili

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{\varphi(a+h) - \varphi(a)} = \frac{f'(a+\vartheta h)}{\varphi'(a+\vartheta h)}, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

což jest zobecnění předchozí věty.

Jakožto applikaci věty o střední hodnotě uveďme důkaz následující věty:

Má-li $f(x)$ v intervallu $(a \,..\, b)$ derivaci $f'(x)$ a jest-li tato derivace v témž intervallu spojitá, tu konverguje podíl přírůstů

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

stejnoměrně k $f'(x)$ pro $\lim h = 0$, t. j. k libovolnému kladnému ε existuje kladné η takové, že platí

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon,$$

jakmile $| h | < \eta$, pro každé x a $x+h$ přináležející intervallu $(a \,..\, b)$.

Dle věty o střední hodnotě máme totéž

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

a vzhledem k supponované spojitosti derivace $f'(x)$ existuje kladné η takové, že při $| h | < \eta$ platí pro hodnoty x a $x+h$ intervallu:

$$| f'(x + \vartheta h) - f'(x) | < \varepsilon,$$

čímž věta dokázána.

Jest-li derivace funkce $f(x)$ pro všecky hodnoty intervallu $(a \,..\, b)$ rovna nulle, má $f(x)$ v intervallu hodnotu stálou.

Značí-li x, $x+h$ dvě libovolné hodnoty intervallu, máme

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x + \vartheta h);$$

ale $x + \vartheta h$ jest také v intervallu a tudíž $f'(x + \vartheta h) = 0$, z čehož

$$f(x + h) = f(x),$$

jak bylo dokázati.

Mají-li dvě funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$ v daném intervallu stejné derivace, jest v něm jich rozdíl stálý.

Učiníme-li

$$F(x) = f(x) - \varphi(x).$$

máme dle supposice

$$F'(x) = f'(x) - \varphi'(x) = 0,$$

a tedy jest $F(x)$ v intervallu stálou.

69. **Vyšší derivace a vyšší differenciály funkce jedné proměnné.**

Má-li funkce $f(x)$ derivaci $f'(x)$, jest tato obecně funkcí x; tato funkce může také míti derivaci, kterou pak značíme $f''(x)$ a nazýváme druhou derivaci původní funkce $f(x)$, označujíce $f'(x)$ ovšem jakožto první derivaci její.

Derivaci druhé derivace zoveme třetí derivací a značíme $f'''(x)$ atd.; obecně označujeme n-tou derivaci symbolem $f^{(n)}(x)$ aneb $y^{(n)}$, je-li původní funkce y.

Jest-li n. p. $y = x^m$, máme posloupné derivace

$$y' = mx^{m-1},\ y'' = m(m-1)x^{m-2},\ y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}, \ldots$$
$$y^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Jest-li m celistvé kladné číslo, jest $y^{(m)} = 1 \cdot 2 \ldots m$ hodnota stálá a vyšší derivace všecky rovny nulle; pro každé jiné m má y nekonečně mnoho derivací, jež jsou vesměs funkce mocninné proměnné x.

Dle definice jest differenciál $df(x)$ funkce $f(x)$ součin $f'(x)\,dx$, tedy obecně opět funkcí x; stanovíme-li differenciál jeho, pokládající dx za stálou, obdržíme druhý differenciál $ddf(x)$ čili stručněji $d^2f(x)$, tak že

$$d^2f(x) = dx\ df'(x) = dx \cdot f''(x)\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

Differenciál druhého differenciálu, stanovený za supposice, že dx jest stálý, sluje třetím differenciálem $dd^2f(x)$ čili $d^3f(x)$, tak že

$$d^3f(x) = f'''(x)\,dx^3,$$

atd., až n-tý differenciál

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)\, dx^n$$

se objeví jakožto součin z n-té derivace a z n-té mocnosti differenciálu neodvisle proměnné.

Vzhledem k rovnicím

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, \ldots,$$

sluje druhá derivace také druhým differenciálným podílem, třetí derivace třetím differenciálným podílem; atd.

Označujeme-li danou funkci $f(x)$ jednou literou y, píšeme arci

$$dy = y'dx, \quad d^2y = y''dx^2, \quad d^3y = y'''dx, \ldots,$$

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$$

Tak jako první derivace y' se jevila jakožto $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, možno i další derivace vyjádřiti jakožto limity podílů z *vyšších differencí* funkce y a z mocností přírůstu Δx.

Označíme-li libovolný přírůst Δx stručně h, jest příslušný přírůst čili difference funkce $y = f(x)$ dle čl. 68.:

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = hf'(x + \vartheta h),$$

kde ϑ jest hodnota mezi 0 a 1 obsažená.

Označíme-li symbolem $\Delta\Delta y$ čili $\Delta^2 y$ differenci této difference č. druhou differenci funkce y, tedy přírůst hodnoty Δy příslušný přírůstu h proměnné x

$$\begin{aligned}\Delta^2 y &= f(x+2h) - f(x+h) - [f(x+h) - f(x)] \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),\end{aligned}$$

máme, kladouce $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$, dle čl. 68.

$$\Delta^2 y = \Delta\varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(x + \vartheta_1 h), \quad 0 < \vartheta_1 < 1,$$

t. j.

$$\Delta^2 y = h\,[f'(x + \vartheta_1 h + h) - f(x + \vartheta_1 h)],$$

a tedy opětnou applikací věty čl. 68.:

$$\Delta^2 y = hhf''(x + \vartheta_1 h + \vartheta_2 h), \quad 0 < \vartheta_2 < 1.$$

Obdobně plyne difference č. přírůst této difference t. j. třetí difference

$$\Delta^3 y = h^3 f'''(x + \vartheta_1 h + \vartheta_2 h + \vartheta_3 h),$$

a obecně n-tá difference ve tvaru

$$\Delta^n y = h^n f^{(n)}(x + \vartheta_1 h + \vartheta_2 h + \ldots + \vartheta_n h)$$

kde každé ϑ_ν jest mezi 0 a 1, aneb ve tvaru

$$\Delta^n y = h^n f^{(n)}(x + \vartheta h),$$

kde ϑ značí hodnotu obsaženou mezi 0 a n.

Odvození této formule supponovalo, že $f(x)$ má derivace až včetně do n-té, že tedy $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, . ., $f^{(n-1)}(x)$ jsou ovšem funkce spojité; je-li i $f^{(n)}(x)$ funkce spojitá, jest rozdíl

$$f^{(n)}(x + \vartheta h) - f^{(n)}(x) = \varepsilon$$

číselně libovolně malý pro dosti malé $|\, h \,|$, tak že pak

$$\Delta^n y = h^n [f^{(n)}(x) + \varepsilon] = d^n y + \varepsilon h^n,$$

kde ε jest hodnota nekonečně malá, je-li h nekonečně malé; n-tý differenciál $d^n y$ jest tedy ona část n-té difference, která jest úměrná n-té mocnosti přírůstu proměnné.

Vzhledem k

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = f^{(n)}(x) + \varepsilon = \frac{d^n y}{dx^n} + \varepsilon,$$

máme pro $\lim h = 0$,

$$\lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n},$$

čímž n-tá derivace vyjádřena jako limita podílu z n-té difference funkce a z n-té mocnosti přírůstu proměnné.

V případě, kdy $f^{(n)}(x) \gtrless 0$, máme při $\lim h = 0$,

$$\lim \frac{\Delta^n y}{d^n y} = \lim \frac{[f^{(n)}(x) + \varepsilon]\, h^n}{f^{(n)}(x)\, h^n} = 1 + \frac{1}{f^{(n)}(x)} \lim \varepsilon = 1,$$

a lze tedy v příčině problémů v čl. 58. vytknutých zaměniti n-tou differenci n-tým differenciálem; jsouť obě tyto hodnoty nekonečně malé n-ho stupně, je-li h vzato za nekonečně malé prvního stupně, a jich rozdíl εh^n jest nekonečně malý vyššího stupně.

Jest-li n. p. $y = \sin x$, máme posloupně

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{(4)} = \sin x, \ldots$$

a od čtvrté derivace, která se shoduje s danou funkcí, se první čtyři funkce opakují periodicky bez konce. — Patrně možno

také psáti

$$y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\quad y'' = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),\quad y''' = \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{2}\right),\ \ldots$$

obecně

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Jest-li

$$y = f(u), \quad \text{kde} \quad u = \varphi(x),$$

máme posloupně

$$dy = f'(u)\,du,$$

$$d^2y = du\,df'(u) + f'(u)\,d^2u = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u,$$

$$d^3y = du^2\,df''(u) + f''(u)\,2du\,d^2u + d^2u\,df'(u) + f'(u)\,d^3u$$
$$= f'''(u)\,du^3 + 3f''(u)\,du\,d^2u + f'(u)\,d^3u,$$

kde ovšem nutno položiti

$$du = \varphi'(x)\,dx, \quad d^2u = \varphi''(x)\,dx^2, \quad d^3u = \varphi'''(x)\,dx^3.$$

Jest-li

$$y = uv$$

součinem dvou funkcí proměnné x, máme posloupně

$$dy = u\,dv + v\,du,$$
$$d^2y = u\,d^2v + 2du\,dv + v\,d^2u,$$
$$d^3y = u\,d^3v + 3du\,d^2v + 3d^2u\,dv + v\,d^3u,$$

atd., a obecně

$$d^ny = u\,d^nv + \binom{n}{1}du\,d^{n-1}v + \binom{n}{2}d^2u\,d^{n-2}v + \ldots + v\,d^nu,$$

kde $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$ značí binomické koefficienty při mocnosti n-té.

Formuli tu možno symbolicky psáti

$$d^n(uv) = (du + dv)^n,$$

rozvine-li se totiž pravá strana dle binomické věty, připíše-li se do prvního a posledního členu 0-tá mocnost hodnoty dv, resp. du, a nahradí-li se pak obecně du^μ, dv^ν, resp. hodnotami $d^\mu u$, $d^\nu v$, při čemž d^0u, d^0v značí u, v.

Za platnosti obdobné symboliky máme obecnější Leibnitzovu formuli

$$d^n(uvw\ldots t) = (du + dv + \ldots + dt)^n.$$

Kapitola V.

Rozvoj funkce jedné proměnné v řadu mocninnou.

70. **Methoda neurčitých koefficientův.**

Jest-li v mocninné řadě

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

konvergující pro $| x | < R$, $(R > 0)$, absolutní člen a_0 různý od 0, tu existuje kladné číslo ε takové, že při $| x | < \varepsilon$ součet řady jest různý od nully a téhož znamení jako a_0.

Dle čl. 45. jest $f(x)$ funkce spojitá pro všecka x hovící nerovnosti $| x | < R$; má tedy (čl. 42.) $f(x)$ pro dosti malé $| x |$ totéž znamení jako $f(0)$, t. j. jako a_0.

Nyní snadno dokážeme větu, tvořící základ pro methodu neurčitých součinitelův:

Víme-li, že dvě mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

jsou stejné pro všecka x číselně menší než určité kladné číslo α, aneb i jen pro nekonečně mnoho hodnot $x_1, x_2, x_3, \ldots$, jichž limita jest $\lim_{\nu=\infty} x_\nu = 0$, soudíme, že jsou obě řady totožné, t. j. že $a_n = b_n$ pro každý index n.

Jinak řečeno: možno-li nějakou funkci rozvinouti v řadu mocninnou, může se to státi jen na jediný způsob.

Dle supposice platí rovnost

$$0 = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1) x + (a_2 - b_2) x^2 + \ldots$$

pro každé x číselně menší než α, aneb alespoň pro nekonečně mnoho hodnot $x_1, x_2, x_3 \ldots$ majících 0 za limes. Kdyby $a_0 - b_0 \gtrless 0$,

tu by dle předchozí pomocné věty existovalo kladné ε takové, že při $|x| < \varepsilon$ by řada byla různá od nully, což odporuje supposici; musí tedy $a_0 - b_0 = 0$, a tedy máme

$$0 = x[a_1 - b_1 + (a_2 - b_2)x + (a_3 - b_3)x^2 + \ldots],$$

a vzhledem k $x \gtrless 0$:

$$0 = a_1 - b_1 + (a_2 - b_2)x + (a_3 - b_3)x^2 + \ldots$$

pro všecky ony hodnoty x. Kdyby $a_1 - b_1 \gtrless 0$, dospěli bychom opět k neshodě, a tedy musí $a_1 - b_1 = 0$, atd., obecně $a_n - b_n = 0$, čímž věta dokázána.

N. p. existuje-li pro funkci $\frac{1}{1-x}$ rozvoj mocninný

$$\frac{1}{1-x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

musí

$$1 = (1-x)(a_0 + a_1 x - a_2 x^2 + \ldots),$$

č. dle čl. 30.

$$1 = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + (a_3 - a_2)x^3 + \ldots,$$

a tedy dle věty o neurčitých koefficientech

$$a_0 = 1, \quad a_1 - a_0 = 0, \quad a_2 - a_1 = 0, \quad a_3 - a_2 = 0, \ldots$$

t. j.

$$1 = a_0 = a_1 = a_2 = \ldots,$$

čímž

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Řada konverguje při $|x| < 1$, a pak jest její součin s $(1-x)$ patrně 1, z čehož patrno, že při $|x| < 1$ součet řady jest $\frac{1}{1-x}$.

Obecněji možno rozvinouti v řadu mocninnou každou racionálnou funkci lomenou, jejíž jmenovatel pro $x = 0$ nevymizí, jakož řadou Taylorovou snadno shledáme; koefficienty rozvoje, jenž sluje řadou rekurrentní,

$$\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_\mu x^\mu} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

snadno plynou methodou neurčitých koefficientů, odstraníme-li jmenovatele a seřadíme-li pravou stranu dle mocnosti proměnné x.

Tím nabýváme rovnic

$$b_0 = a_0c_0, \quad b_1 = a_0c_1 + a_1c_0, \quad b_2 = a_0c_2 + a_1c_1 + a_2c_0, \ldots,$$
$$0 = a_0c_\nu + a_1c_{\nu-1} + \ldots + a_\mu c_{\nu-\mu}, \quad (\nu > \mu),$$

z nichž vzhledem k $a_0 \gtrless 0$ posloupně vypočteme $c_0, c_1, c_2, \ldots$

71. Věta Taylorova.

Jest-li $f(x)$ racionálná celistvá funkce stupně $n-1$-ho:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{n-1}x^{n-1},$$

nalezneme posloupným derivováním

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots + (n-1)\,c_{n-1}x^{n-2},$$
$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + \ldots + (n-1)(n-2)\,c_{n-1}x^{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n-1)}(x) = (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2 \cdot 1.$$

Učiníme-li v těchto výrazech $x = 0$, máme

$$f(0) = c_0, \quad f'(0) = c_1, \quad f''(0) = 1 \cdot 2 \cdot c_2, \quad f'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3\,c_3, \ldots,$$
$$f^{(n-1)}(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1),$$

tak že

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1} + f''(0)\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}},$$

značíme-li symbolem $\underline{|n-1}$ součin $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)$, čili faktoriellu $n-1$.

Značí-li x_0 libovolnou stálou hodnotu, a položíme-li

$$f(x_0 + x) = \varphi(x),$$

jest $\varphi(x)$ patrně opět racionálnou celistvou funkcí stupně $n-1$-ho, a tedy

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\frac{x}{1} + \varphi''(0)\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \varphi^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}.$$

Avšak dle čl. 63. máme

$$\varphi'(x) = \frac{df(x_0+x)}{d(x_0+x)}\,\frac{d(x_0+x)}{dx} = f'(x_0+x),$$

a obdobně

$$\varphi''(x) = f''(x_0+x), \quad \varphi'''(x) = f'''(x_0+x), \ldots,$$

čímž

$$\varphi(0) = f(x_0), \quad \varphi'(0) = f'(x_0), \quad \varphi''(0) = f''(x_0), \ldots,$$

a tedy

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{x}{1} + f''(x_0)\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$
$$+ f^{(n-1)}(x_0)\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}},$$

aneb píšeme-li h místo x,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{1} + f''(x_0)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$
$$+ f^{(n-1)}(x_0)\frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}},$$

z kteréžto formule vychází hořejší pro $x_0 = 0$; tím vyjádřena funkce $f(x_0 + h)$ pomocí hodnot, kterých nabývá funkce se svými derivacemi pro x_0, a pomocí přírůstu h. Není-li $f(x)$ racionálná celistvá funkce stupně n—1-ho, nemůže tato formule býti správnou; avšak polynom na pravé straně stojící přece často udává $f(x_0 + h)$ přibližně, jakož vychází z následující úvahy.

Položme $f(x_0 + h)$ do tvaru

$$(24) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$
$$+ f^{(n-1)}(x_0)\frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}} + R,$$

kde R značí t. z. *zbytek* řady, t. j. hodnotu, kterou nutno přidati k napsanému polynomu, aby se obdržela přesná hodnota $f(x_0 + h)$, t. j. hodnotu

$$R = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - f''(x_0)\frac{h^2}{1 \cdot 2} - \ldots$$
$$- f^{(n-1)}(x_0)\frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}}.$$

Abychom tento výraz R zjednodušili, položme

$$x_0 + h = a, \quad h = a - x_0,$$

čímž

$$R = f(a) - f(x_0) - f'(x_0)(a - x_0) - f''(x_0)\frac{(a - x_0)^2}{1 \cdot 2} - \ldots$$
$$- f^{(n-1)}(x_0)\frac{(a - x_0)^{n-1}}{\underline{|n-1}}.$$

Vezměme nyní v úvahu funkci

$$F(x) = f(a) - f(x) - f'(x)\,(a-x) - f''(x)\,\frac{(a-x)^2}{1\,.\,2} - \cdots$$
$$- f^{(n-1)}(x)\,\frac{(a-x)^{n-1}}{\underline{|n-1}},$$

která při $x = x_0$ nabývá hodnoty R, tedy $F(x_0) = R$; mimo to patrně $F(a) = 0$ a dále derivováním

$$F'(x) = -f^{(n)}(x)\,\frac{(a-x)^{n-1}}{\underline{|n-1}}.$$

Na funkci tu applikujme věty čl. 68. Dle jedné z nich platí

$$F(a) - F(x_0) = (a - x_0)\,F'(x_1),$$

kde x_1 značí jistou hodnotu mezi x_0 a a obsaženou; vložením hodnot, které jsme pro $F(a)$, $F(x_0)$ a $F'(x)$ obdrželi, máme

$$R = (a - x_0)\,f^{(n)}(x_1)\,\frac{(a-x_1)^{n-1}}{\underline{|n-1}},$$

aneb, píšeme-li opět $x_0 + h$ místo a a položíme-li $x_1 = x_0 + \vartheta h$ $(0 < \vartheta < 1)$,

$$R = \frac{h^n(1-\vartheta)^{n-1}}{\underline{|n-1}}\,f^{(n)}(x_0 + \vartheta h). \tag{25}$$

Do tohoto tvaru položil *Cauchy* zbytek R*).

Dle obecnější formule téhož čl. 68. platí relace

$$\frac{F(a) - F(x_0)}{\varphi(a) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(x_1)}{\varphi'(x_1)},$$

kde $\varphi(x)$ značí funkci, jejíž derivace nevymizí v intervallu $(a\,..\,x_0)$; tato relace vzhledem k hořejším hodnotám $F(a)$, $F(x_0)$ a $F'(x)$ podává zbytek ve tvaru velmi obecném**)

$$R = \frac{\varphi(a) - \varphi(x_0)}{\varphi'(x_1)}\,f^{(n)}(x_1)\,\frac{(a-x_1)^{n-1}}{\underline{|n-1}}.$$

Položíme-li $\varphi(x) = (a-x)^p$, kde $p \geqq 1$, máme

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi(x_0) = (a - x_0)^p, \quad \varphi'(x) = -p\,(a-x)^{p-1},$$

a tedy

$$R = \frac{(a-x_0)^p\,(a-x_1)^{n-p}}{p\,\underline{|n-1}}\,f^{(n)}(x_1). \tag{26}$$

*) *Cauchy*, Exercises de Mathématiques, t. I.

**) Tento a následující výraz pro R podal *O. Schlömilch*, Handbuch der Diff.- u. Integralrechnung, 1847, p. 178 a *E. Roche*, Mém. de l'Acad. de Montpellier 1858; sr. Journal de Liouville, 2e série, t. III, p. 271.

Béřeme-li speciálně $p = 1$, vychází pro R hořejší výraz (25), béřeme-li však $p = n$, obdržíme

$$R = \frac{(a - x_0)^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(x_1),$$

čili

$$R = \frac{h^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h). \tag{26'}$$

Tento tvar zbytku podal *Lagrange.*

Formule (24) vyjádřuje t. z. větu *Taylorovu**); formule (25), (26) neb (26') podává t. z. zbytek jakožto funkci neznámé hodnoty ϑ, o níž jen víme, že se nalézá mezi 0 a 1.

Odvození formule (24) *se opíralo o supposici, že funkce* $f(x)$ *má v intervallu* $(x_0 \,..\, x_0 + h)$ *určité a konečné derivace* $f'(x)$, $f''(x)$, . ., $f^{(n)}(x)$; tedy jen tehdy, kdy tomu tak jest, jsme oprávněni tvrditi, že platí věta Taylorova (24).

72. Řada Taylorova.

Stane-li se, *že derivace funkce* $f(x)$ *každého řádu jsou v intervallu* $(x_0 \,..\, x_0 + h)$ *určité a konečné*, možno v Taylorově formuli (24) za n vzíti libovolně velké číslo; *platí-li mimo to*

$$\lim_{n = \infty} R = 0,$$

plyne z (24) *řada Taylorova*:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + f''(x_0) \frac{h^2}{1 \,.\, 2} + \cdots \tag{27}$$

Nekonečná řada na pravo jest pak ovšem konvergentní, maje za součet hodnotu $f(x_0 + h)$.

Požadavky, učiněné při odvození této formule, jsou vždy vyplněny, kdy derivace funkce $f(x)$ každého řádu v intervallu $(x_0 \,..\, x_0 + h)$ jest určitá a číselně menší než určité kladné číslo A. Pak platí totiž formule (24), v níž pro zbytek dle *Lagrange-e* máme výraz

$$R = \frac{h^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h),$$

---

*) *Taylorem* r. 1715 uveřejněná formule jest vlastně nekonečný rozvoj (27) v následujícím čl.; zbytek R podal první *Lagrange* v Théorie des fonctions analytiques, chap. VI. Rozvoj v podstatě s Taylorovým totožný uveřejnil již r. 1694 *Jan Bernouilli* (Opera omnia, t. I., pag. 125); v. *Genocchi-Peano,* l. c. pag. 319.

a tedy

$$| R | < \frac{| h |^n}{|n} A.$$

Avšak řada $\Sigma \frac{z^n}{|n}$ konverguje při každém z (čl. 26.), a tedy platí $\lim \frac{| h |^n}{|n} = 0$ pro $n = \infty$, a tudíž i $\lim R = 0$, jak bylo dokázati.

Řada Taylorova platí obecněji pro funkce $f(x)$, jichž n-tá derivace jest tvaru $u^n v$, kde u, v jsou funkce x a n, jež pro všecky hodnoty x intervallu $(x_0 \ldots x_0 + h)$ a pro každé n jsou resp. číselně menší než dvě určitá kladná čísla A, B. Pak totiž patrně

$$| R | < \frac{| h |^n A^n}{|n} B,$$

a vzhledem k $\lim \frac{| h |^n A^n}{|n} = 0$ jest také $\lim R = 0$ pro $n = \infty$.

Libovolný člen Taylorovy řady (27), *jenž není nullou, jest pro dosti malé* $| h |$ *číselně větší nežli následující zbytek*, to jest při $f^{(n-1)}(x_0) \gtrless 0$ platí

$$\left| f^{(n-1)}(x_0) \frac{h^{n-1}}{|n-1} \right| > | R |,$$

je-li $| h |$ dosti malé. Značíme-li uvažovaný člen u_n, máme, užívajíce pro R tvaru Lagrange-ova,

$$\frac{R_n}{u_n} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \vartheta h)}{f^{(n-1)}(x_0)} \frac{h}{n},$$

a tedy vzhledem k spojitosti funkce $f^{(n)}(x)$ pro $x = x_0$, vycházející z existence konečné derivace $f^{(n+1)}(x)$ v intervallu $(x_0 \ldots x_0 + h)$,

$$\lim \frac{R}{u_n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{f^{(n-1)}(x_0)} \lim \frac{h}{n} = 0 \quad \text{pro } \lim h = 0.$$

Jest tedy podíl $\frac{R}{u_n}$ pro dosti malé $| h |$ číselně libovolně malý a tedy $| R | < | u_n |$, jak bylo dokázati.

Píšeme-li řadu Taylorovu ve tvaru

$$f(x + h) - f(x) = f(x) h + \frac{f''(x) h^2}{1 . 2} + \frac{f'''(x) h^3}{1 . 2 . 3} + \cdots,$$

jest levá strana přírůstem $\Delta f(x)$ funkce $f(x)$ pro přírůst h proměnné, a hodnoty

$$f'(x)\,h, \quad f''(x)\,h^2, \quad f'''(x)\,h^3, \ldots$$

jsou resp. posloupné differenciály

$$df(x), \quad d^2f(x), \quad d^3f(x), \ldots,$$

klademe-li $h = dx$. Tím řada ta nabývá tvaru

$$\Delta f(x) = df(x) + \frac{d^2f(x)}{1\,.\,2} + \frac{d^3f(x)}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots,$$

aneb užijeme-li konečné formule Taylorovy:

$$\Delta f(x) = df(x) + \frac{d^2f(x)}{1\,.\,2} + \cdots + \frac{d^{n-1}f(x)}{\underline{|n-1}} + \frac{d'^nf(x)}{\underline{|n}},$$

kde $d'^nf(x)$ značí $f^{(n)}(x + \vartheta h)h^n$, tedy n-tý differenciál funkce $f(x)$, ale pro hodnotu proměnné $x + \vartheta h$ utvořený.

Tyto dvě formule vyjadřující přírůst funkce pomocí jejich differenciálů mají svá analoga i u funkce více proměnných, jakož později nalezneme.

73. Řada Mac-Laurinova.

Učiníme-li ve větě Taylorově (24) $x_0 = 0$, a píšeme-li x místo h, máme formuli *Mac-Laurinovu*

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{1\,.\,2} + \cdots + f^{(n-1)}(0)\,\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}} + \mathrm{R}, \tag{28}$$

kde zbytku R možno dáti tvar Cauchy-ův

$$\mathrm{R} = \frac{x^n(1-\vartheta)^{n-1}}{\underline{|n-1}}\,f^{(n)}(\vartheta x), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

aneb Lagrange-ův:

$$\mathrm{R} = \frac{x^n}{\underline{|n}}\,f^{(n)}(\vartheta x), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Odvození formule této se opíralo o supposici, že funkce $f(x)$ má v intervallu $(0\,..\,x)$ konečné derivace až včetně n-tou.

Má-li $f(x)$ v intervallu $(0\,..\,x)$ konečnou derivaci každého řádu, možno v této formuli vzíti n libovolně velké, a platí-li

mimo to

$$\lim_{n=\infty} R = 0,$$

máme rozvoj

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{1\,.\,2} + \cdots, \tag{29}$$

jenž sluje řadou *Mac-Laurinovou*, ač ji tento sám připisuje Taylorovi.

Řadu tu jsme nalezli jakožto speciálný případ řady Taylorovy; avšak i tuto lze naopak z oné odvoditi. Položíme-li $f(x_0 + h) = F(h)$, máme, jakož jsme již v čl. 70. podotkli, $f^{(n)}(x_0 + h) = F^{(n)}(h)$, a rozvoj Mac-Laurinův funkce $F(h)$ se pak shoduje s rozvojem Taylorovým (27).

74. Funkce definovaná řadou mocninnou.

Dle předchozích článků možno funkci, která v intervallu $(x \,..\, x + h)$ se všemi svými derivacemi jest konečnou, v případě, kdy zbytek R má 0 za limitu, rozvinouti v řadu pokračující dle celistvých a kladných mocností proměnné h.

Přirozeným způsobem se naskytuje otázka, zda-li naopak funkce definovaná konvergující řadou mocninnou jest také funkcí onoho rázu, t. j. má-li derivace všech řádů a v jakém intervallu?

K otázce té odpoví následující úvaha*):

Budiž

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{30}$$

řada mocninná, konvergující pro všecka x číselně menší než kladné číslo A; řadou tou jest pak definována funkce $f(x)$ spojitá v každém intervallu, jehož krajní hodnoty jsou číselně menší než A (čl. 45.).

Budiž x hodnota, jejíž číselný obnos x' jest menší než A, a h hodnota, jejíž číselný obnos h' jest menší než $A - x'$, tak že tedy $|x + h| < A$ a řada

$$f(x + h) = a_0 + a_1(x + h) + a_2(x + h)^2 + \cdots \tag{31}$$

konvergentní.

Pokládáme-li v ní x za dané číslo, h za proměnnou, definuje pravá strana funkci této proměnné pro hodnoty h hovící

*) *J. Tannery* l. c. pag. 180.

nerovnosti $|h| < A - x'$; jednotlivé členy řady (31) možno rozvinouti na polynomy seřaděné dle stoupajících mocností h.

Značíme-li literou H kladné číslo menší než $A - x'$, tu řada

$$a'_0 + a'_1 (x' + H) + a'_2 (x' + H)^2 + \ldots$$

v níž $a'_0, a'_1, a'_2, \ldots$ značí číselné obnosy koefficientů $a_0, a_1, a_2, \ldots$, konverguje, jelikož mocninná řada (30) při $|x| < A$ konverguje absolutně. Při $|h| \leqq H$ možno tedy applikovati na řadu (31) větu v čl. 46. odvozenou: proměnné h v ní nastupuje na místo x, H na místo a, $a_\nu (x + h)^\nu$ na místo $s^{(\nu)}$. Dle věty té možno součet řady (31) obdržeti sečítáním hodnot

$$\begin{aligned}
&a_0, \\
&a_1 x + a_1 h, \\
&a_2 x^2 + 2a_2 xh + a_2 h^2, \\
&a_3 x^3 + 3a_3 x^2 h + 3a_3 x h^2 + a_3 h^3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

provedeným dle sloupců, t. j. při $|h| \leqq H$ máme

$$f(x + h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots,$$

kde řady

$$\begin{aligned}
A_0 &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \\
A_1 &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots, \\
A_2 &= a_2 + 3a_3 x + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

všecky konvergují při $|x| < A$.

Vzhledem k stejnoměrné konvergenci těchto řad (čl. 32.) a vzhledem k tomu, že jejich členy jsou spojité funkce proměnné x, soudíme dle čl. 67., že

$$A_1 = f'(x), \quad A_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} f''(x), \quad A_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x), \ldots,$$

čímž nalezena tato věta:

Mocninná řada

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

konvergující pro hodnoty x číselně menší než kladné číslo A, definuje funkci mající pro tytéž hodnoty derivace všech řádů, které obdržíme derivováním jednotlivých členů v podobě konvergujících řad:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + (n+1) a_{n+1} x^n + \ldots, \\
f''(x) &= 1 \cdot 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + \ldots + (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f^{(p)}(x) &= 1 \cdot 2 \ldots p a_p + 2 \cdot 3 \ldots (p+1) a_{p+1} x + \ldots \\
&\quad + (n+1)(n+2) \ldots (n+p) a_{n+p} x^n + \ldots
\end{aligned}$$

Zároveň platí rozvoj Taylorův

$$f(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \cdots$$
$$= f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h}{1.2} + \cdots + f^{(p)}(x)\frac{h^p}{\lfloor p} + \cdots$$

pro všecky hodnoty x a h hovící nerovnostem

$$|x| < A, \quad |x| + |h| < A,$$

kde znamení $<$ *ovšem vylučuje rovnost.*

75. Rozvoj funkce exponenciálné.

Všechny derivace $f^{(n)}(x)$ funkçe $f(x) = e^x$ jsou opět e^x a tedy konečné v každém intervallu $(\alpha \ldots \beta)$, $\alpha < \beta$, a menší než e^β; platí tedy pro e^x řada Taylorova i Mac-Laurinova.

Poněvadž $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, máme dle řady Mac-Laurinovy *rozvoj platný pro každé x*:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Zakončíme-li rozvoj n-tým členem, značíce zbytek R_n, máme

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} + R_n,$$
$$R_n = \frac{x^n}{\lfloor n} e^{\vartheta x}, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

kde užito Lagrange-ova tvaru pro zbytek.

Jde-li o obecnou funkci exponenciálnou $f(x) = a^x$, kdę a značí kladnou hodnotu, máme $f^{(n)}(x) = (\log a)^n \cdot a^x$ a tedy

$$|f^{(n)}(x)| < |(\log a)^n a^\beta|,$$

pročež platí pro každé x rozvoj

$$a^x = 1 + x\log a + \frac{x^2(\log a)^2}{1.2} + \frac{x^3(\log a)^3}{1.2.3} + \cdots,$$

aneb, píšíce po n-tém členu zbytek,

$$a^x = 1 + x\log a + \frac{x^2(\log a)^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^{n-1}(\log a)^{n-1}}{\lfloor n-1}$$
$$+ \frac{x^n}{\lfloor n}(\log a)^n a^{\vartheta x}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Tytéž rozvoje vycházejí z předchozích, uvážíme-li, že

$$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}.$$

76. Rozvoj funkcí sin x a cos x.

Budiž $f(x) = \sin x$, pak jsou derivace posloupně

$$\cos x, \quad -\sin x, \quad -\cos x, \quad \sin x, \ldots$$

a opakují se periodicky, tak že obecně jsou

$$f^{(4n)}(x) = \sin x, \quad f^{(4n+1)}(x) = \cos x, \quad f^{(4n+2)}(x) = -\sin x,$$
$$f^{(4n+3)}(x) = -\cos x,$$

a tedy pro $x = 0$ mají resp. hodnoty 0, 1, 0, -1.

Derivace ty jsou v každém intervallu číselně $\leqq 1$, *a tedy platí rozvoj Mac-Laurinův pro každé* x:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \frac{x^7}{\underline{|7}} + \ldots;$$

rozvoj ten první podal *Newton*, jakož i rozvoj pro $\cos x$ a e^x*).

Omezíme-li se na prvních n členů shrnujíce ostatní ve zbytku tvaru Lagrange-ova, máme

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{\underline{|2n-1}} + R_{2n+1},$$

kde vzhledem k $f^{(m)}(x) = \sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)$ jest

$$R_{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{\underline{|2n+1}} \sin\left(\vartheta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{x^{2n+1}}{\underline{|2n+1}} \cos(\vartheta x + n\pi),$$
$$0 < \vartheta < 1.$$

Supponujeme-li $0 < x < \frac{x}{2}$, jest i ϑx v těchto mezích, a tedy $\cos(\vartheta x + n\pi) = (-1)^n \cos \vartheta x$ kladný při sudém a záporný při lichém n, a tedy R_{2n+1} souhlasně kladný neb záporný.

Píšeme-li tedy

$$\sin x = x + R_3 = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + R_5 = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} + R_7 = \ldots,$$

jsou při $0 < x < \frac{\pi}{2}$ zbytky R_3, R_7, R_{11}, .. hodnoty záporné,

*) *Lagrange*, Leçons sur le Calcul des Fonctions, Leçon cinquième; Oeuvres, t. X, p. 45.

R_5, R_9, R_{13}, . . kladné, t. j.

$$\sin x < x, \quad \sin x < x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}}, \ldots$$

$$\sin x > x - \frac{x^3}{\underline{|3}}, \quad \sin x > x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \frac{x^7}{\underline{|7}} \ldots$$

Učiníme-li $f(x) = \cos x$, máme obdobně

$$f^{(4n)}(x) = \cos x, \quad f^{(4n+1)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4n+2)}(x) = -\cos x,$$
$$f^{(4n+3)}(x) = \sin x,$$

a tedy jsou pro každé x všecky derivace číselně $\leqq 1$, a rozvoj Mac-Laurinův platný.

Pro $x = 0$ mají napsané čtyři derivace hodnoty 1, 0, -1, 0, *čímž máme rozvoj platný pro každé x*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \frac{x^6}{\underline{|6}} + \ldots$$

Omezíme-li se opět na prvních n členů této řady, máme, užívajíce Lagrange-ova tvaru zbytku,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{\underline{|2n-2}} + R_{2n},$$

kde vzhledem k $f^{(m)}(x) = \cos\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)$ platí pro zbytek

$$R_{2n} = \frac{x^{2n}}{\underline{|2n}} \cos\left(\vartheta x + \frac{2n\pi}{2}\right) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{\underline{|2n}} \cos \vartheta x, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Je-li x v prvním kvadrantu, jest také $\vartheta x < \frac{\pi}{2}$ a $\cos \vartheta x > 0$, tak že pak R_{2n} jest kladný při sudém a záporný při lichém n; z čehož pro $0 < x < \frac{\pi}{2}$ vychází, že

$$\cos x < 1, \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}}, \ldots$$

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}}, \quad \cos x > 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \frac{x^6}{\underline{|6}}, \text{ atd.}$$

77. **Rozvoj funkce logarithmické.**

Funkce $\log x$ jest nespojitá pro $x = 0$, tedy nemůže pro ni existovati rozvoj pokračující dle mocností x o celistvých a kladných mocnitelích; funkce, již rozvineme, jest $f(x) = \log(1 + x)$. kde symbol log značí přirozený logarithmus.

Poněvadž

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},$$
$$f''(x) = -(1+x)^{-2},\quad f'''(x) = 1\,.\,2\,(1+x)^{-3},\ldots,$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\,\underline{|n-1}\,(1+x)^{-n},$$

jsou všecky derivace i s funkcí $f(x)$ konečné v každém intervallu, obsaženém mezi -1 a libovolným kladným číslem, a platí tedy při každém $x > -1$ pro $\log(1+x)$ konečná formule Mac-Laurinova. Pro $x = 0$ máme $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1,\ldots$ $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\,\underline{|n-1}$, a tedy při $x > -1$:

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n,$$

kde dle *Lagrange-e*

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}\,x^n}{n(1+\vartheta x)^n},\quad 0 < \vartheta < 1,$$

a dle *Cauchy-a*

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}\,(1-\vartheta)^{n-1}\,x^n}{(1+\vartheta x)^n},\quad 0 < \vartheta < 1.$$

Jest-li $\lim R_n = 0$ pro $\lim n = \infty$, platí rozvoj

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Řada ta při $|x| > 1$ diverguje, jakož kriterium podílové ihned ukazuje; nemůže tedy tento rozvoj míti platnost než pro hodnoty v intervallu $(-1\ldots+1)$, což blíže prozkoumáme.

Budiž nejprve x mezi 0 a 1, a pišme zbytek v prvním tvaru

$$R_n = (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^n;$$

zde má $\frac{1}{n}$ za limitu 0, a ryzí zlomek $\frac{x}{1+\vartheta x}$ ukazuje, že také druhý faktor má 0 za limitu. Jest tedy $\lim R_n = 0$.

Je-li, za druhé, $x = 1$, tu vzhledem k okolnosti, že $\frac{1}{1+\vartheta}$, i když by ϑ se blížilo nulle, nepřesáhne 1, můžeme tvrditi, že druhý faktor nepřesáhne 1, a jest tedy opět $\lim R_n = 0$.

Je-li, za třetí, x záporné $x = -z$, užijme druhého tvaru pro zbytek

$$R_n = \frac{(-1)^{2n-1}\,(1-\vartheta)^{n-1}z^n}{(1-\vartheta z)^n} = \frac{-z}{1-\vartheta z}\left(\frac{z-\vartheta z}{1-\vartheta z}\right)^{n-1}.$$

Při $z < 1$ jest první faktor konečná hodnota, číselně menší než $\frac{z}{1-z}$; druhý faktor jest menší než $\frac{(z-\vartheta z)^{n-1}}{(1-\vartheta)^{n-1}}$, t.j. než z^{n-1} a jest tedy jeho limita 0, čímž nalézáme $\lim R_n = 0$.

Rozvoj $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ platí tedy *pro všecky hodnoty x hovící požadavku* $-1 < x \leqq 1$, *a jen pro ty*; neboť při $x = -1$ jest rozvoj řadou divergentní $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots$, ovšem také $\log(1-1)$ jest $-\infty$.

Pro $x = 1$ máme součet harmonické řady se střídavými znameními:

$$\log 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots,$$

která slabě konverguje. Při $|x| < 1$ rozvoj konverguje absolutně, jakož ihned vychází podílovým kriteriem.

Při kladném x má zbytek R_n znamení $(-1)^{n-1}$ a číselně jest menší než $\frac{1}{n}x^n$, tak že možno jej také psáti ve tvaru

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{\vartheta x^n}{n}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Při záporném $x = -z$ a při $z < 1$ jest hořejší zbytek R_n součinem dvou faktorů, které, jakož jsme již podotkli, jsou resp. menší než

$$\frac{z}{1-z} \text{ a } z^{n-1}.$$

Možno tudíž R_n psáti ve tvaru

$$R_n = -\frac{\vartheta z^n}{1-z} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\vartheta x^n}{1+x}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Speciálně pro $n = 2$ máme, značíce x hodnotu mezi 0 a 1 a také ϑ, ϑ' hodnoty mezi 0 a 1:

$$\log(1+x) = x - \frac{\vartheta x^2}{2},$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{\vartheta' x^2}{1+x}.$$

78. Vyčíslení logarithmů.

Při $0 < x < 1$ jsme měli

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \tag{32}$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots,$$

tedy odečtením

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right). \tag{33}$$

Položíme-li v (32) $x = \frac{h}{N}$, kde ovšem $h < N$, máme formuli

$$\log(N+h) - \log N = \frac{h}{N} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{N^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{N^3} - \frac{1}{4}\frac{h^4}{N^4} + \ldots \tag{34}$$

podávající $\log(N+h)$, znám-li $\log N$.

Položíme-li v (33)

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{h}{N}, \text{ t. j. } x = \frac{h}{2N+h},$$

bude při každém kladném h a N patrně $x < 1$, a tedy

$$\log(N+h) - \log N = 2\left(\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{(2N+h)^3} + \frac{1}{5}\frac{h^5}{(2N+h)^5} + \ldots\right). \tag{35}$$

Jak řada (34) tak (35) konvergují dosti rychle, jest-li N proti h dostatečně velké. Pro $h = 1$ přejdou řady ty do řad

$$\begin{cases} \log(N+1) - \log N = \frac{1}{N} - \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{N^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{N^4} + \ldots, \\ \log(N+1) - \log N \\ \qquad = 2\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2N+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2N+1)^5} + \ldots\right), \end{cases} \tag{36}$$

z nichž druhá ovšem rychleji konverguje a pro každé kladné N platí, kdežto v první nutno $N > 1$ vziti.

Jelikož $\log 1 = 0$ známe, podává tato formule pro $N = 1$ řadu rychle konvergující

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \ldots\right);$$

nápotom podává ta i ona formule posloupně logarithmy všech celistvých čísel. Ostatně stačí počítati přímo logarithmy kmenných čísel, a to se výhodně může státi takto:

Jsou-li již vypočteny logarithmy všech kmenných čísel menších než kmenné číslo p, jehož logarithmus chceme vyčísliti, uvažme, že

$$\log \frac{p^2-1}{p^2} = \log (p-1) + \log (p+1) - 2 \log p,$$

a že tedy

$$\log p = \frac{1}{2}\left[\log (p-1) + \log (p+1)\right] - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

$$\log p = \frac{1}{2}\left[\log (p-1) + \log (p+1)\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p^4} + \frac{1}{3p^6} + \ldots\right),$$

čímž $\log p$ vypočten, jelikož logarithmy sudých čísel $p-1$ a $p+1$ snadno vyčíslíme pomocí známých již logarithmů jich kmenných faktorů.

V praksi se užívá ještě jiných obratů k získání rychleji konvergujících řad. Učiníme-li n. p. v druhé formuli (36) $N = 4$, máme

$$\log 5 = \log 4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \ldots\right);$$

vzhledem k $\log 4 = 2 \log 2$ jest tedy $\log 5$ znám. Jde-li nyní n. p. o $\log 7$, učiníme v téže formuli $N = 49 = 7^2$ a obdržíme $\log 50$ čili $\log (2 \cdot 5^2) = \log 2 + 2 \log 5$, čímž

$$\log 2 + 2 \log 5 - 2 \log 7 = 2\left(\frac{1}{99} + \frac{1}{3 \cdot 99^3} + \frac{1}{5 \cdot 99^5} + \ldots\right);$$

odtud vypočteme $\log 7$ pomocí známých již $\log 2$ a $\log 5$ a řady velmi rychle konvergující.

Logarithmy obecné $\mathrm{Log}\, N$ o základě 10 obdržíme z logarithmů přirozených (čl. 52.), násobíme-li tyto modulem M:

$$M = \frac{1}{\log 10} = \mathrm{Log}\, e;$$

máme tedy

$$\frac{1}{M} = \log 10 = \log 2 + \log 5 = 3 \log 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \ldots\right),$$

$$\frac{1}{M} = 6\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \ldots\right) + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \ldots\right),$$

čímž snadno vypočteme*)

$$\frac{1}{M} = 2{\cdot}30258\ 50929\ 94045\ 6\ldots,$$

$$\frac{1}{M} = 0{\cdot}43429\ 44819\ 03251\ 8\ldots$$

79. Interpolování v tabulkách logarithmických.

Při počítání pomocí logarithmických tabulek předpokládáme, že difference čísel — jich přírůsty — jsou úměrny přírůstům logarithmů. Že to s dostatečnou přesností platí, vychází takto:

V čl. 75. jsme nalezli, že

$$\log(1+x) = x - \frac{\vartheta x^2}{2}, \quad \text{kde} \quad 0 < \vartheta < 1;$$

tedy pro umělé logarithmy Log, jichž modul jest M,

$$\operatorname{Log}(1+x) = M\left(x - \frac{\vartheta x^2}{2}\right),$$

aneb, učiníme $x = \frac{h}{N}$, kde v praksi $h < 1$,

$$\text{(37)} \qquad \operatorname{Log}(N+h) - \operatorname{Log} N = M\left(\frac{h}{N} - \frac{\vartheta h^2}{2N^2}\right),$$

a speciálně pro $h = 1$,

$$\text{(38)} \quad \operatorname{Log}(N+1) - \operatorname{Log} N = M\left(\frac{1}{N} - \frac{\vartheta'}{2N^2}\right), \quad 0 < \vartheta' < 1.$$

Položíme-li

$$\operatorname{Log}(N+h) - \operatorname{Log} N = \Delta, \quad \operatorname{Log}(N+1) - \operatorname{Log} N = D,$$

dále

$$\Delta = hD + \varepsilon \quad \text{a} \quad h = \frac{\Delta}{D} + \eta,$$

---

*) *J. A. Serret*, Cours de Calcul différentiel et intégral, 2e éd. t. I, pag. 169.

bude patrně ε chyba, které se dopouštíme počítajíce $\log(N + h)$ pomocí tabulek logarithmických za užití proporce nahoře zmíněné

$$\frac{\Delta}{D} = \frac{h}{1}, \tag{39}$$

a η bude chyba při počítání čísla náležejícího k danému logarithmu.

Vzhledem k předcházejícím formulím (37), (38) máme pro tyto chyby následující výrazy

$$\varepsilon = \Delta - hD = \frac{M(\vartheta' h - \vartheta h^2)}{2N^2},$$

$$\eta = h - \frac{\Delta}{D} = \frac{\vartheta h^2 - \vartheta' h}{2N - \vartheta'}.$$

Vzhledem k tomu, že h, ϑ, ϑ' jsou mezi 0 a 1 a že $M < \frac{1}{2}$, soudíme, že

$$|\varepsilon| < \frac{1}{4N^2}, \quad \left|\frac{\eta}{N}\right| < \frac{1}{N(2N-1)}.$$

Přesahuje-li tedy N číslo 10000, jest ε číselně menší než čtvrtina osmé jednotky decimálné, a relativná chyba $\frac{\eta}{N}$ nanejvýš trochu přesáhne $\frac{1}{2N^2}$, t. j. polovici osmé jednotky decimálné.

Jest tedy užívání proporce (39) přípustné, počítáme-li s logarithmy sedmimístnými, omezujíce také čísla na sedm míst.

80. Řada binomická.

V čl. 50. jsme definovali pro kladné $a + b$ a pro libovolné reálné m hodnotu $(a + b)^m$, kterou možno psáti $a^m \left(1 + \frac{a}{b}\right)^m$. Položíme-li $\frac{a}{b} = x$, přejde druhý faktor do $(1 + x)^m$; toť jest funkce, jejíž rozvoj sluje řadou binomickou.

Položme tedy

$$f(x) = (1 + x)^m,$$

z čehož derivováním

$$f'(x) = m(1 + x)^{m-1}, \quad f''(x) = m(m - 1)(1 + x)^{m-2}, \ldots$$

obecně

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

Jsou tedy $f(x)$ a všecky její derivace konečné v každém intervallu obsaženém v intervallu $(-1\ldots a)$, $a > 0$. Platí tedy pro každé x hovící požadavku $x > -1$ konečný rozvoj Mac-Laurinův.

Poněvadž $f(0) = 1$, $f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$, máme při $x > -1$ formuli

(40)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1\,.\,2\ldots(n-1)}x^{n-1} + R_n,$$

kde možno R_n psáti ve tvarech

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\ldots n}(1+\vartheta x)^{m-n}x^n, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1\,.\,2\ldots(n-1)}\,.\,(m-n+1)(1-\vartheta)^{n-1}(1+\vartheta x)^n x^n, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Pro hodnoty, pro něž $\lim_{m=\infty} R_n = 0$, máme rozvoj

(41)
$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots,$$

a toť jest binomická řada pro libovolný exponent m; pro kladné, celistvé m končí tento rozvoj s x^m, a redukuje se na binomickou formuli z elementů algebry známou, pro každý jiný exponent ale pokračuje do nekonečna, a jen tento druhý případ v následující úvaze prozkoumáme.

Podíl $n+1$-ho a n-ho členu rozvoje (41) jest

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{m-n+1}{n}x = -x + \frac{m+1}{n}x$$

a má pro $\lim n = \infty$ za limitu $-x$; řada (41) tedy konverguje při $|x| < 1$, při $x = \pm 1$ podílové kriterium nerozhoduje, a při $|x| > 1$ diverguje. Rozvoj Mac-Laurinův (40) možno snad prodloužiti do nekonečna jen pro hodnoty x hovící požadavku

$-1 < x \leqq 1$. Vyšetřme tedy, zda-li pro tyto hodnoty lim R_n se rovná 0.

Budiž nejprve $0 < x < 1$, a pišme R_n v prvním tvaru

$$R_n = \left[\frac{mx}{1} \cdot \frac{(m-1)x}{2} \cdot \frac{(m-2)x}{3} \cdots \frac{(m-n+1)x}{n}\right] \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n-m}}.$$

Limita závorky jest 0 pro $n = \infty$; neboť zvětšíme-li n o 1, přibude závorce faktor $\frac{(m-n)x}{n+1} = -x\left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right)$, jehož limita jest $-x$ pro $n = \infty$, který tedy pro dosti velké n jest libovolně blízký hodnotě $-x$. Z toho jde, že v závorce jsou faktory větší než 1 v konečném počtu, kdežto počet faktorů číselně menších než n, ano i číselně menších než každé číslo obsažené mezi 1 a x, roste s n nad každé číslo, a že tedy limita závorky jest 0. Poněvadž faktor $\frac{1}{(1+\vartheta x)^{n-m}}$ při rostoucím n nepřesáhne 1, máme lim $R_n = 0$, a tedy platí rozvoj (41). Budiž, za druhé, x mezi 0 a -1 a položme $x = -z$ užívajíce druhého výrazu pro zbytek R_n

$$R_n = (-1)^n \left[\frac{(m-1)z}{1} \cdots \frac{(m-n+1)z}{n-1}\right] mz(1-\vartheta z)^{m-1} \left(\frac{1-\vartheta}{1-\vartheta z}\right)^{n-1}.$$

Závorka má opět za limitu 0 při $n = \infty$, a také druhý faktor má vzhledem k $\frac{1-\vartheta}{1-\vartheta z} < 1$ za limitu 0, vyjma případ, kdyby limita čísla ϑ byla 0; ale i pak jest limita druhého faktoru konečná. nanejvýš mz. Jest tedy lim $R_n = 0$ a rozvoj (41) platí i při $-1 < x < 0$.

Platí tedy binomický rozvoj (41) *při* $|x| < 1$ *pro každý exponent* m.

81. **Binomický rozvoj** $(1+x)^m$ **při** $x = \pm 1$.

Při $x = 1$ platí formule (40) a stačí vyšetřiti opět lim R_n. K tomu cíli uvažujme nekonečný součin*)

$$P = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+1}{b+1} \cdot \frac{a+2}{b+2} \cdot .,$$

*) *Genocchi-Peano*, l. c. pag. 77.

v němž ani a ani b není 0 neb celistvým záporným číslem, a dokažme, že při $a > b$ jest $P = \infty$, při $a < b$ jest $P = 0$, při $a = b$ ovšem $P = 1$.

Budiž nejprvé $a > b$ a $b > 0$; píšeme-li jednotlivé součinitele v P:

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{a-b}{b}, \quad \frac{a+1}{b+1} = 1 + \frac{a-b}{b+1},$$

$$\frac{a+2}{b+2} = 1 + \frac{a-b}{b+1}, \ldots$$

soudíme (čl. 34.) z divergence řady (čl. 22.)

$$\frac{a-b}{b} + \frac{a-b}{b+1} + \frac{a-b}{b+2} + \ldots,$$

že $P = \infty$.

Budiž zase $a > b$ ale $b < 0$. Zvolme celistvé m tak velké, aby $b + m > 0$, a položme $a + m = a'$, $b + m = b'$, takže $a' > b'$ a $b' > 0$.

Píšeme-li P ve tvaru

$$P = \frac{a(a+1)\ldots(a+m-1)}{b(b+1)\ldots(b+m-1)} \cdot \frac{a'}{b'} \cdot \frac{a'+1}{b'+1} \cdot \frac{a'+2}{b'+2} \ldots,$$

vidíme, že první faktor jest konečná hodnota, různá od nully, a následující nekonečný součin opět ∞, tedy $P = \pm \infty$.

Budiž, za třetí, $a < b$, pak

$$\frac{1}{P} = \frac{b}{a} \cdot \frac{b+1}{a+1} \cdot \frac{b+2}{a+2} \ldots = \infty$$

a tedy $P = 0$.

Užijeme-li při $x = 1$ zbytku ve tvaru prvním

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} (1 + \vartheta)^{m-n},$$

můžeme psáti

$$R_n = (-1)^n \frac{-m}{1} \cdot \frac{-m+1}{2} \cdot \frac{-m+2}{3} \ldots$$

$$\frac{-m+n-1}{n} (1 + \vartheta)^{m-n}.$$

Faktor $(1 + \vartheta)^{m-n}$ jest < 1 při $n > m$, a součin předchozí pro $n = \infty$ přejde do nekonečného součinu P, učiníme-li v tomto $a = -m$, $b = 1$; součin ten jest tedy 0 při $-m < 1$ čili $m > -1$.

Pak tedy $\lim R_n = 0$ a *platí tedy rozvoj*

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \cdots$$

pro každé $m > -1$.

Při $m = -1$ přejde rozvoj do řady divergentní $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$; při $m < -1$ má rozvoj obecný člen

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} = \pm \frac{-m}{1} \cdot \frac{-m+1}{2} \cdot \frac{-m+2}{3} \cdots \frac{-m+n-1}{n},$$

rostoucí číselně vzhledem k $-m > 1$ s n do nekonečna, a tedy jest rozvoj divergentní.

Při $x = -1$ nejsme oprávněni tvrditi platnost formule (40) a nutno řadu binomickou

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

přímo vyšetřiti v příčině její konvergence a jejího případného součtu.

Součty po sobě jdoucích členů této řady jsou

$$s_1 = 1,$$

$$s_2 = 1 - \frac{m}{1} = -\frac{m-1}{1},$$

$$s_3 = -\frac{m-1}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2},$$

$$s_4 = \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

. . . . . .

$$s_n = (-1)^n \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)}{1 \cdot 2 \cdots (n-2)}$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}.$$

Píšeme-li s_n ve tvaru

$$s_n = \frac{-m+1}{1} \cdot \frac{-m+2}{2} \cdots \frac{-m+n-1}{n-1},$$

vidíme, že $\lim_{n=\infty} s_n$ jest totožný s nekonečným součinem P pro $a = 1 - m$, $b = 1$, a jest tedy $\lim s_n = 0$ při $1 - m < 1$, t. j. při $m > 0$; máme tedy při $m > 0$:

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

kteráž formule souhlasí s binomickým rozvojem pro $x = -1$ a pro kladný exponent m. Je-li ale $m < 0$, tu $1 - m > 1$ a tedy $\lim_{n=\infty} s_n = \infty$, t. j. řada diverguje, rozvoj binomický při $x = -1$ a záporném exponentu m tedy přechází do formule $0^m = \infty$. Jest-li konečně $m = 0$, nabývá $(1-1)^m$ bezvýznamného tvaru 0^0, kdežto rozvoj se redukuje na první člen 1.

Celkem jsme tedy shledali, *že binomický rozvoj při* $|x| < 1$ *platí pro každý exponent* m *(reálný); jest-li ale* $x = 1$ *platí jen pro* $m > -1$, *a jest-li* $x = -1$ *platí pro* $m > 0$, *a jen v těchto případech* *).

82. **Rozvoj funkce arc tg x.**

V čl. 67. jsme dokázali, že při $|x| < 1$ platí rozvoj

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{42}$$

Tvar tohoto rozvoje možno přímo nalézti, vyjdeme-li ze supposice, že možno arc tg x rozvinouti v řadu mocninnou

$$\text{arc tg } x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots,$$

platnou pro $|x| < R$; řada ta pak konverguje stejnoměrně v každém intervallu obsaženém v intervallu $(-R \ldots R)$, tak že při $|x| < R$ máme derivováním (čl. 67.)

$$\frac{1}{1 + x^2} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots$$

Levou stranu možno při $|x| < 1$ nahraditi geometrickou řadou

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots,$$

čímž máme relace (čl. 70.)

$$c_1 = 1, \quad 2c_2 = 0, \quad 3c_3 = -1, \quad 4c_4 = 0, \quad 5c_5 = 1, \ldots,$$

podávající koefficienty $c_1, c_2, c_3, \ldots$, a tedy i hořejší rozvoj (42), v němž

$$c_0 = \text{arc tg } 0 = 0.$$

---

*) Konvergenci a součet řady binomické vyšetřil ve všech případech — i pro komplexní x a m — *Abel;* v. Oeuvres, 2e éd., t. I., pag. 219.

Odvození řady (42) pomocí věty Mac-Laurinovy*) vymáhá stanovení posloupných derivací funkce $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$; a poněvadž tyto jsou dosti komplikované

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \ldots,$$

dejme se jinou cestou**), kterou také zjistíme, že rozvoj (42) platí i pro $x = \pm 1$.

Přihlížejíce k formuli platné pro každé x

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2},$$

položme

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n R(x),$$

kde $R(x)$ nutno stanoviti. Učiníme-li v této rovnici $x = 0$, obdržíme $R(0) = 0$, a derivováním jejím obdržíme

$$R'(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

Položíme-li ve formuli (čl. 67.)

$$\frac{R(x) - R(0)}{\varphi(x) - \varphi(0)} = \frac{R'(\vartheta x)}{\varphi'(\vartheta x)}, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

za funkci $\varphi(x)$ výraz $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, bude $\varphi'(x) = x^{2n}$, $R(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ a formule podá

$$R(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \frac{(\vartheta x)^{2n}}{1+(\vartheta x)^2} \cdot \frac{1}{(\vartheta x)^{2n}} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{1+\vartheta^2 x^2}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Při $|x| \leqq 1$ jest $\lim_{n=\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 0$ a $\frac{1}{1+\vartheta^2 x^2}$ nepřesáhne 1, pročež $\lim R = 0$, *tak že máme rozvoj platný pro* $|x| \leqq 1$:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots;$$

při $|x| > 1$ řada ta patrně diverguje.

*) *Schlömilch*, Compendium der höheren Analysis, díl I., 5. vyd., § 47., aneb Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, díl I., 4. vyd., § 38.

**) *Genocchi-Peano*, l. c. pag. 83.

Pro $x = 1$ obdržíme řadu *Leibnitzovu* pro π

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

ovšem pomalu konvergující.

Rozvoj (42) poskytuje pro Ludolfovo číslo řad velmi rychle konvergujících. Užijeme-li na př. relace (čl. 56.)

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3},$$

máme $\frac{\pi}{4}$ vyjádřeno součtem dvou řad již rychleji konvergujících

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \cdots,$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \cdots$$

Ještě rychleji sbíhajících řád docílíme, položíme-li, značíce a kladné celistvé číslo,

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a+\alpha} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a+\beta}, \tag{43}$$

t. j.

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{1}{a+\alpha} + \frac{1}{a+\beta}}{1 - \frac{1}{(a+\alpha)(a+\beta)}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{2a+\alpha+\beta}{(a+\alpha)(a+\beta)-1}$$

čili

$$\frac{1}{a} = \frac{2a+\alpha+\beta}{(a+\alpha)(a+\beta)-1},$$

aneb odstranivše jmenovatele,

$$\alpha\beta = a^2 + 1.$$

Stačí tedy číslo $a^2 + 1$ rozložiti na součin dvou faktorů $\alpha \cdot \beta$, aby platila relace (43).

Pro $a = 2$, $a^2 + 1 = 1 \cdot 5$, a tedy

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7},$$

a pro $a = 3$, $a^2 + 1 = 2 \cdot 5$ a tedy

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8},$$

čímž

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$$
$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8},$$

a podobně dále.

Následujícího, velmi výdatného obratu užil *Machin* k vyjádření čísla π rychle konvergujícími řadami. Položme

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5},$$

tedy

$$\varphi = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots$$

Z $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{5}$ soudíme $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{120}{119}$;

jelikož tedy $\operatorname{tg} 4\varphi > 1$, jest $4\varphi > \frac{\pi}{4}$, a položíme-li $4\varphi - \frac{\pi}{4} = \psi$, bude

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg} 4\varphi - 1}{1 + \operatorname{tg} 4\varphi} = \frac{1}{239}.$$

Máme tedy

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots$$

a

$$\frac{\pi}{4} = 4\varphi - \psi = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \cdots\right]$$
$$- \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right].$$

83. **Rozvoj funkce arc sin x.**

Položíme-li $f(x) = \operatorname{arc\,sin} x$, máme $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, a vyšší derivace mají tvar dosti složitý, pročež upustíme od rozvoje této funkce pomocí řady Mac-Laurinovy*). Rozvineme-li však $f'(x)$ pomocí věty binomické, máme kladouce v řadě pro $(1+x)^m$

*) V. *Schlömilch*, l. c. a *Tisserand*, Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal, p. 45.

místo m číslo $-\frac{1}{2}$ a na místo x hodnotu $-x^2$,

$$f'(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \cdots$$

a rozvoj ten platí jen pro $-1 < x < 1$. Jest tedy 1 konvergenční poloměr této řady, a ona stejnoměrně konvergentní v každém intervallu obsaženém v $(-1 \ldots + 1)$.

Uvažujeme-li řadu

$$F(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

vidíme, že derivováním její členů vzniká řada předchozí, stejnoměrně konvergující; dle čl. 67. poslední řada při $|x| < 1$ konverguje a má derivaci $F'(x) = f'(x)$. Rozdíl $F(x) - f(x)$ jest tedy stálý, a poněvadž $F(0) = 0$, $f(0) = 0$, jest rozdíl ten 0, t. j. *pro* $|x| < 1$ *platí rozvoj*

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Řada ta pro $|x| = 1$ také ještě konverguje (čl. 27.), a podává pak dle věty *Abelovy*, v čl. 56. dokázané, $\arcsin 1$, t. j.

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{1}{7} + \cdots$$

84. Funkce sin x a cos x vyjádřeny nekonečnými součiny *).

V goniometrii se vyjádřují sin. a cos. násobku úhlu pomocí sin. a cos. úhlu; tak n. p. platí pro liché $m = 2n + 1$ formule

$$\sin mz = m \sin z - \frac{m(m^2 - 1^2)}{\underline{|3}} \sin^3 z + \frac{m(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{\underline{|5}} \sin^5 z - \cdots + (-1)^n \frac{m(m^2 - 1^2) \ldots [m^2 - (m-2)^2]}{\underline{|2n+1}} \sin^{2n+1} z.$$

Pravá strana jest racionálná celistvá funkce $2n + 1$-ho stupně hodnoty $\sin z$, a možno ji tedy rozložiti na kořenové

*) *Genocchi-Peano*, l. c. pag. 110.

lineárné faktory:

$$\sin(2n+1)z = A(\sin z - \zeta_1)(\sin z - \zeta_2)\ \ldots\ (\sin z - \zeta_{2n+1}),$$

kde $\zeta_\nu = \sin z_\nu$, a z_ν značí takový oblouk, že $\sin(2n+1)z_\nu = 0$. To ale vymáhá $(2n+1)z_\nu = k\pi$ čili $z_\nu = \frac{k\pi}{2n+1}$; vezmeme-li $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n$, obdržíme pro $\sin z_\nu$ vesměs různé hodnoty, poněvadž by rovnost dvou

$$\sin\frac{k\pi}{2n+1} = \sin\frac{k'\pi}{2n+1}$$

vymáhala buď $\frac{k\pi - k'\pi}{2n+1} = 2l\pi$ aneb $\frac{k\pi + k'\pi}{2n+1} = \pi + 2l\pi$,

t. j. buď $\frac{k-k'}{2n+1} = 2l$ aneb $\frac{k+k'}{2n+1} = 2l+1$, což obé jest nemožné.

Máme tedy, sloučíme-li kořenové faktory příslušné hodnotám $\pm k$ do faktoru kvadratického:

$$\sin(2n+1)z = A\sin z\left(\sin^2 z - \sin^2\frac{\pi}{2n+1}\right)$$
$$\left(\sin^2 z - \sin^2\frac{2\pi}{2n+1}\right)\ldots\left(\sin^2 z - \sin^2\frac{n\pi}{2n+1}\right),$$

aneb v jiném tvaru

$$\sin(2n+1)z = B\sin z\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)$$
$$\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\ldots\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Abychom vyčíslili stálý faktor B, dělme rovnici tu hodnotou z a limitujme $\lim z = 0$; vzhledem k

$$\lim\frac{\sin(2n+1)z}{z} = \lim\frac{\sin(2n+1)z}{(2n+1)z}\cdot(2n+1) = 2n+1,$$

obdržíme

$$\sin(2n+1)z = (2n+1)\sin z\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)$$
$$\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\ldots\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Učiníme-li nyní $(2n+1)\,z = x$, máme formuli

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdot\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Zvolíme-li libovolně celistvé číslo m avšak tak velké, aby $(m+1)\,\pi > |\,x\,|$ a supponujeme-li $n > m$, můžeme formuli tu psáti

$$\sin x = \mathrm{A}\,.\,\mathrm{B},$$

při čemž

$$\mathrm{A} = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdot\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{m\pi}{2n+1}}\right),$$

$$\mathrm{B} = \left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(m+1)\,\pi}{2n+1}}\right)\cdot\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Při $\lim n = \infty$ patrně máme $\lim (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1} = x$, a *)

$$\lim\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right) = 1-\frac{x^2}{k^2\pi^2},$$

a tedy

$$\lim \mathrm{A} = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdot\cdot\left(1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right) = \mathrm{P}_m.$$

---

*) $\lim\limits_{\nu=\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{\nu}}{\sin\frac{\alpha}{\nu}} = \lim\left(\dfrac{\sin\frac{x}{\nu}}{\frac{x}{\nu}}\cdot\dfrac{\frac{\alpha}{\nu}}{\sin\frac{\alpha}{\nu}}\cdot\dfrac{x}{\alpha}\right) = \dfrac{x}{\alpha}.$

Abychom odhadli B, uvažme, že všecky jeho součinitele jsou < 1, a tedy i $B < 1$; a poněvadž při kladných $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_h$ platí (čl. 34.)

$$(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\ldots(1-\varepsilon_h) > 1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_h),$$

máme

$$B > 1 - \sin^2\frac{x}{2n+1}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{(m+1)\pi}{2n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right].$$

Poněvadž sinus jest menší než oblouk, máme

$$\sin^2\frac{x}{2n+1} < \frac{x^2}{(2n+1)^2}.$$

Roste-li oblouk z od 0 do $\frac{\pi}{2}$, ubývá funkci $\frac{\sin z}{z}$ *) od 1 do $\frac{2}{\pi}$, a jest tedy při $0 < z < \frac{\pi}{2}$ stále $\sin z > \frac{2z}{\pi}$; klademe-li do této nerovnosti posloupně $z = \frac{(m+1)\pi}{2n+1}, \ldots, \frac{n\pi}{2n+1}$, obdržíme

$$B > 1 - \left(\frac{x}{2n+1}\right)^2\left[\frac{\pi^2}{2^2\left(\frac{(m+1)\pi}{2n+1}\right)^2} + \ldots + \frac{\pi^2}{2^2\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)^2}\right],$$

$$B > 1 - \frac{x^2}{4}\left[\frac{1}{(m+1)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right].$$

Avšak

$$\frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1},$$

$$\frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

a tedy

$$B > 1 - \frac{x^2}{4}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right), \text{ a též } B > 1 - \frac{x^2}{4m};$$

možno tedy položiti $B = 1 - \frac{\vartheta x^2}{4m}$, kde $0 < \vartheta < 1$.

---

*) Derivace funkce $\frac{\sin}{z}$ jest $\frac{z\cos z - \sin z}{z^2}$ a ta jest záporná; při $0 < z < \frac{\pi}{2}$ platí totiž $z < \operatorname{tg} z$ a tedy jest čitatel $\cos z(z - \operatorname{tg} z)$ záporný.

Nechť nyní n roste do nekonečna; ve výraze $\sin x = A \,.\, B$ konverguje pak A ke konečné hodnotě P_m různé od nully, a tedy konverguje také B k takové hodnotě; tudíž konverguje ϑ k jisté limitě $\lim \vartheta = \vartheta'$ a máme

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\vartheta' x^2}{4m}\right),\quad 0 \leqq \vartheta' \leqq 1.$$

Nyní nechť roste m do nekonečna; tím obdržíme hledaný nekonečný součin pro $\sin x$, od *Eulera* *) pocházející

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots, \tag{44}$$

jehož odvození ukazuje, že platí pro každé x.

Učiníme-li $x = \frac{\pi}{2}$, máme

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\,.\,3}{2^2}\cdot\frac{3\,.\,5}{4^2}\cdot\frac{5\,.\,7}{6^2}\cdots,$$

čili *Wallisovu* formuli

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots \tag{45}$$

Položíme-li v rovnici (44) $\frac{\pi}{2} - x$ na místo x, obdržíme

$$\cos x = \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\frac{\pi}{2}+x}{\pi}\cdot\frac{\frac{3\pi}{2}-x}{\pi}\cdot\frac{\frac{3\pi}{2}+x}{2\pi}\cdot\frac{\frac{5\pi}{2}-\pi}{2\pi}\cdot\frac{\frac{5\pi}{2}+x}{3\pi}\cdot\frac{\frac{7\pi}{2}-x}{3\pi}\cdots,$$

$$\cos x = \frac{\frac{\pi^2}{4}-x^2}{\pi}\cdot\frac{3^2\frac{\pi^2}{4}-x^2}{\pi\,.\,2\pi}\cdot\frac{5^2\frac{\pi^2}{4}-x^2}{2\pi\,.\,3\pi}\cdots,$$

aneb vzhledem k (45)

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots, \tag{46}$$

formule platná pro každé x, taktéž *Eulerem* vyvozená **).

---

*) Introductio in Analysin infinitorum, § 158.

**) Táž formule snadno plyne z (44) pomocí relace $\cos x = \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\sin x}$.

Vzhledem ke konvergenci řady při každém x

$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^2}{3^2}+\cdot\cdot$$

soudíme dle čl. 36., že nekonečný součin (44) jest absolutně a stejnoměrně konvergentní v každém intervallu, a totéž patrně platí o nekonečném součinu (46).

85. Rozvoje funkcí tg x, cotg x a jiných.

Jest-li že nekonečný součin o kladných členech

$$P=(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\cdot\cdot,$$

v němž u_ν jsou funkce x, v nějakém intervallu konverguje stejnoměrně, konverguje v témž intervallu také stejnoměrně řada

$$\log P=\log(1+u_0)+\log(1+u_1)+\log(1+u_2)+\cdot\cdot$$

Dle supposice totiž možno pro libovolné kladné ε vytknouti celistvé p takové, že v rovnici

$$P=(1+u_0)\cdot\cdot(1+u_{n-1})\,Q_n,$$

při $n>p$ platí $|\,Q_n-1\,|<\varepsilon$ pro každé x intervallu. Máme tedy

$$\log P=\log(1+u_0)+\cdot\cdot+\log(1+u_{n-1})+\log Q_n,$$

kde $Q_n=1+\vartheta\varepsilon$, a ϑ značí hodnotu obsaženou mezi -1 a $+1$. Dle čl. 75.

$$\log(1+\vartheta\varepsilon)=\vartheta\varepsilon-\frac{\vartheta^2\varepsilon^2}{2\,(1+\vartheta\vartheta'\varepsilon)^2},\quad 0<\vartheta'<1,$$

a tedy $|\log Q_n|<\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}$ se stává volbou dosti malého ε, t. j. pro dosti velké p libovolně malým pro každé x intervallu, čímž výrok dokázán.

Jest-li $x^2<\pi^2$, t. j. $-\pi<x<\pi$, tu nekonečný součin (42)

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdot\cdot$$

konverguje stejnoměrně a má členy kladné, tak že

$$\log\frac{\sin x}{x}=\log\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)+\log\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)+\cdot\cdot$$

jest řada stejnoměrně konvergující v každém intervallu uvnitř $(-\pi\,..\,\pi)$; řada ta konverguje však i absolutně, poněvadž všecky její členy jsou stejného označení, t. záporné.

Rozvineme-li logarithmy na pravé straně v mocninné řady

$$\log\left(1-\frac{x^2}{\nu^2\pi^2}\right)=-\frac{x^2}{\nu^2\pi^2}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{\nu^4\pi^4}-\frac{1}{3}\frac{x^6}{\nu^6\pi^6}-\cdots,$$

konvergují tyto absolutně a možno tudíž užiti věty v čl. 57. odvozené, čímž nabýváme formule při $-\pi<x<\pi$ platné:

$$\log\frac{\sin x}{x}=-\frac{s_2}{\pi^2}x^2-\frac{1}{2}\frac{s_4}{\pi^4}x^4-\frac{1}{3}\frac{s_6}{\pi^6}x^6-\cdots, \tag{47}$$

kde s_m značí součet nekonečné řady

$$s_m=\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots$$

Z rovnice (46) plyne zcela obdobným způsobem rozvoj při $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ platný:

$$\log\cos x=-\frac{2^2\sigma_2}{\pi^2}x^2-\frac{1}{2}\frac{2^4\sigma_4}{\pi^4}x^4-\frac{1}{3}\frac{2^6\sigma_6}{\pi^6}x^6-\cdots,$$

kde σ_m značí součet nekonečné řady

$$\sigma_m=\frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\cdots,$$

který ostatně snadno vyjádříme součtem s_m; máme totiž

$$\sigma_m+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\cdots=s_m,$$

t. j.

$$\sigma_m+\frac{1}{2^m}s_m=s_m,\quad 2^m\sigma_m=(2^m-1)\,s_m.$$

Tím poslední rozvoj přechází do formule při $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ platné

$$\log\cos x=-\frac{(2^2-1)\,s_2}{\pi^2}x^2-\frac{1}{2}\frac{(2^4-1)\,s_4}{\pi^4}x^4-\frac{1}{3}\frac{(2^6-1)\,s_6}{\pi^6}x^6-\cdots \tag{48}$$

Derivováním rovnice (47) obdržíme (čl. 74.) rozvoj platný při $-\pi<x<\pi$:

$$\operatorname{cotg} x=\frac{1}{x}-\frac{2s_2}{\pi^2}x-\frac{2s_4}{\pi^4}x^3-\frac{2s_6}{\pi^6}x^5-\cdots, \tag{49}$$

a derivováním rovnice (48) rozvoj platný při $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$:

$$(50) \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2(2^2-1)s_2}{\pi^2}x + \frac{2(2^4-1)s_4}{\pi^4}x^3 + \frac{2(2^6-1)s_6}{\pi^6}x^5 + \cdots$$

Z rozvoje toho snadno vychází, že s_{2n} se rovná součinu z π^{2n} a z racionálného součinitele. Rozvineme-li totiž $f(x) = \operatorname{tg} x$, kteráž funkce i se svými derivacemi jest v intervallu $(0 \ldots a)$, $|a| < \frac{\pi}{2}$, konečná, dle věty Mac-Laurinovy, tu především snadno nalezneme

$$f'(x) = \cos^{-2} x, \quad f''(x) = 2\cos^{-3} x \sin x,$$
$$\tfrac{1}{2}f'''(x) = 3\cos^{-4} x \sin^2 x + \cos^{-2} x, \ldots$$

a tím shledáme, že $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)\ldots$ jsou vesměs čísla racionálná; jich vložením do řady Mac-Laurinovy obdržíme

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

Porovnáme-li rozvoj ten s (50), máme

$$s_2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad s_4 = \frac{\pi^4}{90}, \quad s_6 = \frac{\pi^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}, \ldots$$

Pěkněji dojdeme racionálnosti oněch součinitelů jakož i t. z. *čísel Bernouilli-ových* následující cestou. Pišme rozvoj (50) ve tvaru

$$(51) \qquad \frac{\operatorname{tg} x}{2x} = A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \ldots + A_p x^{2p} + \ldots,$$

tak že

$$A_p = \frac{(2^{2p+2}-1)}{\pi^{2p+2}} s_{2p+2},$$

a definujme n-té číslo Bernouilli-ovo rovnicí

$$B_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}} s_{2n};$$

pak jest

$$(52) \qquad A_p = \frac{2^{2p+1}(2^{2p+2}-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2p+2)} B_{p+1},$$

a poslední rozvoj tedy možno psáti

$$(53) \qquad \frac{\operatorname{tg} x}{2x} = \frac{2(2^2-1)}{1 \cdot 2} B_1 + \frac{2^3(2^4-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B_2 x^2 + \ldots + \frac{2^{2p+1}(2^{2p+2}-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2p+2)} B_{p+1} x^{2p} + \ldots$$

Řada (51) při $|x| < \frac{\pi}{2}$ konverguje absolutně, tak jako i řada

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots;$$

násobením obou rozvojů musíme obdržeti $\frac{\sin x}{2x}$, t. j. řadu

$$\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2.3} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \cdots$$

Srovnáme-li koefficienty stejných mocností x v součinu a v této řadě (čl. 70.), obdržíme rovnice

$$A_0 = \frac{1}{2}$$

$$A_1 - \frac{1}{1.2}A_0 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2.3},$$

. . . . . .

$$A_p - \frac{1}{1.2}A_{p-1} + \frac{1}{\lfloor 4}A_{p-2} - \cdots + (-1)^p \frac{A_0}{\lfloor 2p} = \frac{(-1)^p}{2\lfloor 2p+1},$$

z nichž posloupně vypočteme $A_0, A_1, A_2, \ldots$ Rovnice ty ukazují, že čísla A, a tedy vzhledem k (52) i čísla B jsou racionálná. Nalezneme posloupně:

$$A_0 = \frac{1}{2},\ A_1 = \frac{1}{6},\ A_2 = \frac{1}{15},\ A_3 = \frac{17}{630},$$

$$A_4 = \frac{31}{2835},\ A_5 = \frac{691}{155925},\ A_6 = \frac{10922}{6081075}, \ldots$$

a

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},$$

$$B_6 = \frac{691}{2730},\ B_7 = \frac{7}{6},\ B_8 = \frac{3617}{510},\ B_9 = \frac{43867}{798},$$

$$B_{10} = \frac{174611}{330},\ B_{11} = \frac{854513}{138}, \ldots$$

Čísla Bernouilli-ova, jež možno i mnohými jinými rozvoji po způsobu rozvoje (53) definovati, vyskytují se v četných otázkách analyse a mají zajímavé arithmetické vlastnosti.

Kapitola VI.

Funkce více proměnných a funkce implicitní. Vznik rovnic differenciálných.

86. Parciálné č. částečné derivace a differenciály.

Dána-li funkce u více neodvisle proměnných, n. p. tří

$$u = f(x, y, z),$$

a mají-li y, z pevné hodnoty, jeví se u jakožto funkce jediné proměnné x, jejíž derivaci — ač-li existuje — označujeme $f'_x(x, y, z)$ a zoveme částečnou derivací funkce u vzatou dle x; obdobně sluje differenciál funkce u stanovený pro přírůst dx při stálých hodnotách y, z částečným differenciálem a značí se $d_x u$, tak že

$$d_x u = f'_x(x, y, z)\, dx.$$

Obdobně se definují částečné derivace $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ a částečné differenciály

$$d_y u = f'_y(x, y, z)\, dy, \quad d_z u = f'_z(x, y, z).$$

Na základě této definice možno také parciálné derivace psáti ve tvaru differenciálných poměrů

$$f'_x(x, y, z) = \frac{d_x u}{dx}, \quad f'_y(x, y, z) = \frac{d_y u}{dy}, \quad \text{atd.}$$

Dle *Jacobi*-ho se parciálné derivace označují stručněji vynecháním indexu při d ale pomocí nové litery ∂, při čemž proměnná, dle níž se derivuje, jmenovatelem jest dostatečně vyznačena:

$$f'_x(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad f'_y(x, y, z) = \frac{\partial k}{\partial y}, \quad \text{atd.}$$

Při tomto označení není dovoleno $\frac{\partial u}{\partial x}$ pokládati za zlo-

mek, a tedy čítatele od jmenovatele odděliti, poněvadž by pak ∂u musilo vyznačovati různé hodnoty $d_x u$, $d_y u$, atd.; nutno tedy $\frac{\partial u}{\partial x}$ pokládati za nedílný symbol, vyjadřující derivaci f'_x.

Parciálná derivace částečné derivace sluje částečnou derivací druhého řádu, atd.; n. p. derivace $f'_x(x, y, z)$ může míti částečné derivace dle x, dle y a dle z, jež se označují

$$f''_{xx}(x, y, z), \quad f''_{xy}(x, y, z), \quad f''_{xz}(x, y, z),$$

a derivace $f'_y(x, y, z)$ může míti obdobně tři částečné derivace

$$f''_{yx}(x, y, z), \quad f''_{yy}(x, y, z), \quad f''_{yz}(x, y, z),$$

a pod. dále.

Druhým částečným differenciálem funkce u zoveme částečný differenciál některého prvního částečného differenciálu stanovený za supposice, že differenciály neodvisle proměnných dx, dy, dz jsou stálé; druhé differenciály částečné možno označiti $d_x d_x u$, $d_y d_x u$, . ., tak že

$$\begin{aligned} d_x d_x u &= d_x [f'_x(x, y, z)\, dx] = f''_{xx}(x, y, z)\, dx^2, \\ d_x d_y u &= d_x [f'_y(x, y, z)\, dy] = f''_{yx}(x, y, z)\, dx dy, \\ d_y d_x u &= d_y [f'_x(x, y, z)\, dx] = f''_{xy}(x, y, z)\, dx dy, \end{aligned}$$

a pod. dále.

Také druhé částečné derivace možno napsati ve tvaru differenciálných poměrů

$$f''_{xx}(x, y, z) = \frac{d_x d_x u}{dx^2}, \quad f''_{xy}(x, y, z) = \frac{d_y d_x u}{dx dy}, \quad \text{atd.}$$

aneb stručněji označením Jacobi-ho

$$f''_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad f''_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \text{atd.},$$

kde symboly na pravé straně jsou opět nedílné. Přihlížeti k pořadu derivování jest ostatně zbytečné, jakož ukazuje následující článek.

87. **Bezvýznamnost pořadu derivací.**

Parciálná derivace libovolného řádu není závislá na pořadu derivací, jestliže funkce a její derivace až do řádu uvažovaného jsou spojité.

Proveďme důkaz nejprve pro funkci dvou proměnných

$$u = f(x, y),$$

která má částečné derivace prvního a druhého řádu a s. spojité.

Jde o důkaz, že $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Udělíme-li proměnným hodnoty x_0, y_0 a zvětšíme-li x_0 o h, jest přírůst funkce $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)$; zvětšíme-li y_0 o k, jest přírůst tohoto přírůstu

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)],$$

t. j. výraz

$$V = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0),$$

jejž nyní vyjádříme dvojím způsobem.

Utvoříme-li funkci jedné proměnné x

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0),$$

jest patrně

$$V = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0),$$

a tedy dle čl. 68.

$$V = h\,\varphi'(x_0 + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Avšak

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0),$$

a tedy dle téhož článku

$$\varphi'(x) = k\,f''_{xy}(x, y_0 + \vartheta_1 k); \quad 0 < \vartheta_1 < 1.$$

Tím poslední výraz pro V přejde do

$$V = hk\,f''_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta_1 k).$$

Druhého výrazu pro V dojdeme, provedeme-li tuto úvahu tím způsobem, že navzájem vyměníme úlohy, jež připadly proměnným x a y; utvořme tedy funkci jedné proměnné y

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y),$$

a máme patrně

$$V = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\,\psi'(y_0 + \vartheta' k), \quad 0 < \vartheta' < 1.$$

Avšak

$$\psi'(y) = f'_y(x_0 + h, y) - f'_y(x_0, y) = h\,f''_{yx}(x_0 + \vartheta'_1 h, y), \quad 0 < \vartheta'_1 < 1,$$

čímž poslední výraz pro V přejde do

$$V = kh\,f''_{yx}(x_0 + \vartheta'_1 h, y_0 + \vartheta' k).$$

Porovnáme-li oba výrazy pro V nalezené a dělíme-li je součinem

hk, obdržíme

$$f''_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \vartheta' h, y_0 + \vartheta' k);$$

blíží-li se h a k nulle, obdržíme vzhledem ku supponované spojitosti derivací

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0),$$

jak bylo dokázati.

Z okolnosti, že dovoleno pořad dvou po sobě jdoucích derivací obrátiti, vychází ihned, že pořad derivací vůbec jest bezvýznamný.

Máme-li n. p. funkci tří neodvisle proměnných $u = f(x, y, z)$, nalézáme posloupně, za posunované spojitosti funkce a derivací,

$$f^{(4)}_{xyxz} = f^{(4)}_{xxyz} \quad \text{čili} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z},$$

$$f^{(3)}_{zyx} = f^{(3)}_{zxy} = f^{(3)}_{xzy} = f^{(3)}_{xyz}, \text{ a pod.}$$

88. Totálný differenciál a jeho souvislost s přírůstem funkce.

Totálným differenciálem funkce u více proměnných zoveme součet jejích parciálných differenciálů a značíme jej du; pro $u = f(x, y, z)$ máme tedy totálný differenciál

$$du = d_x u + d_y u + d_z u = f'_x(x, y, z)\, dx + f'_y(x, y, z)\, dy + f'_z(x, y, z)\, dz$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Z této definice vychází ihned oprávněnost věty:

Má-li funkce u proměnných $x, y, z, \ldots$ pro všecky jejich hodnoty, v jistých mezích obsažené, stálou hodnotu, jest totálný differenciál du v tomto oboru nullou, a naopak, *platí-li v jistém oboru $du = 0$, jest v něm u stálou.* Jest-li totiž u stálé, jsou všecky parciálné derivace $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \ldots$ nullami (čl. 62.) a tedy $du = 0$; jest-li naopak $du = 0$, tu vzhledem k tomu, že differenciály $dx, dy, dz, \ldots$ jsou libovolné, soudíme, že

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \ldots$$

Z první rovnice soudíme dle čl. 68., že u jest nezávislé na x, z druhé, že jest nezávislé na y, atd., a tedy že jest stálé.

Jsou-li v, w funkce týchž proměnných $x, y, z, \ldots$ a platí-li v jistém oboru $dv = dw$, různí se v něm v a w jen o stálou a naopak; neboť pak $d(v - w) = 0$.

Při funkci jedné proměnné $u = f(x)$ o derivaci $f'(x)$ jsme nalezli mezi přírůstem funkce Δu a differenciálem jejím $f'(x)\,\Delta x$ vztah (čl. 61.)

$$\Delta u = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x = du + \varepsilon\,\Delta x,$$

kde ε se stává současně s Δx nekonečně malým. Obdobný vztah mezi přírůstem a totálným differenciálem platí též u funkcí více proměnných.

Jest-li $u = f(x, y, z, \ldots)$ funkce více proměnných o spojitých prvních parciálných derivacích, tu platí pro přírůst funkce, příslušný přírůstům Δx, Δy, Δz, . .,

$$\Delta u = f'_x(x, y, z, \ldots)\,\Delta x + f'_y(x, y, z, \ldots)\,\Delta y + f'_z(x, y, z, \ldots)\,\Delta z + \ldots$$
$$+ \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \gamma\,\Delta z + \ldots = du + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \gamma\,\Delta z + \ldots,$$

kde α, β, γ jsou současně s Δx, Δy, Δz . . nekonečně malé hodnoty).*

Při $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$, $\lim \Delta z = 0, \ldots$ jest i $\lim \Delta u = 0$, t. j. u jest pak nutně funkcí spojitou proměnných $x, y, z, \ldots$

Pro funkci dvou proměnných $u = f(x, y)$ pišme

$$\Delta u = f(x + \Delta y, y + \Delta y) - f(x, y)$$
$$= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y);$$

nyní

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x\, f'_x(x + \vartheta \Delta x, y + \Delta y)$$
$$= \Delta x\,[f'_x(x, y) + \alpha],$$

kde $\alpha = f'_x(x + \vartheta\,\Delta x, y + \Delta y) - f'_x(x, y)$ má 0 za limitu pro $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$, jelikož jsme funkci dvou proměnných $f'_x(x, y)$ supponovali spojitou.

Obdobně

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y\, f'_y(x, y + \vartheta' \Delta y) = \Delta y\,[f'_y(x, y) + \beta],$$

kde $\beta = f'_y(x, y + \vartheta' \Delta y) - f'_y(x, y)$ má za limitu 0 pro $\lim \Delta\beta = 0$. Tím Δu nabývá tvaru

$$\Delta u = \Delta x\, f'_x(x, y) + \Delta y\, f'_y(x, y) + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y,$$

jak bylo dokázati.

---

*) Při funkci jedné proměnné nebylo k platnosti analogické věty třeba derivaci supponovati spojitou; v. čl. 61.

Jde-li o funkci tří proměnných $u = f(x, y, z)$, stačí její přírůst napsati ve tvaru

$$\begin{aligned}\Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)\\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z)\\ &+ f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z)\\ &+ f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z),\end{aligned}$$

abychom applikací věty o přírůstu funkce jedné proměnné došli k výsledku

$$\begin{aligned}\Delta u = \Delta x f'_x(x, y, z) + \Delta y f'_y(x, y, z) + \Delta z f'_z(x, y, z)\\ + \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z,\end{aligned}$$

a obdobně pro funkci jakéhokoli počtu proměnných.

89. **Differenciál funkce složené z více funkcí jedné proměnné.**

Pomocí předchozí formule odvodíme pravidlo pro differencování funkcí složených z jiných funkcí. Mějme funkci n. p. tří proměnných

$$u = f(x, y, z),$$

které nechť jsou dané funkce jedné proměnné t, čímž u se jeví býti funkcí této jedné proměnné, a předpokládejme, že má u částečné derivace prvního řádu vesměs spojité, a že také funkce

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

mají derivace.

Značí-li Δt libovolný přírůst, Δx, Δy, Δz, Δu korrespondující přírůsty hodnot x, y, z, u, máme za učiněných supposic

$$\begin{aligned}\Delta u = f'_x(x, y, z)\,\Delta x + f'_y(x, y, z)\,\Delta y + f'_z(x, y, z)\,\Delta z\\ + \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z,\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}\frac{\Delta u}{\Delta t} = f'_x(x, y, z)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y, z)\frac{\Delta y}{\Delta t} + f'_z(x, y, z)\frac{\Delta z}{\Delta t}\\ + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma \frac{\Delta z}{\Delta t}.\end{aligned}$$

Pro $\lim \Delta t = 0$ mají také Δx, Δy, Δz a tedy i α, β, γ za limitu 0, a obdržíme

$$\frac{du}{dt} = f'_x(x, y, z)\,\frac{dx}{dt} + f'_y(x, y, z)\,\frac{dy}{dt} + f'_z(x, y, z)\,\frac{dz}{dt}$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{dz}{dt},$$
$$du = f'_x(x, y, z)\,dx + f'_y(x, y, z)\,dy + f'_z(x, y, z)\,dz$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,$$

t. j. *differenciál složené funkce se rovná součtu parciálných differenciálů*; ovšem nyní nejsou dx, dy, dz differenciály neodvislých proměnných, a tedy libovolné hodnoty, nýbrž jsou to hodnoty

$$dx = \varphi'(t)\,dt, \quad dy = \psi'(t)\,dt, \quad dz = \chi'(t)\,dt$$

závislé na jednom libovolném differenciálu dt.

Pro funkci $u = f(x)$ závislou od $x = \varphi(t)$ nalézáme

$$du = f'(x)\,dx,$$

kterou formuli jsme již v čl. 63. odvodili.

Závisí-li u n. p. na třech funkcích additivně

$$u = x + y - z,$$

máme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -1$$

a tedy

$$du = dx + dy - dz,$$

jakož bylo již v čl. 62. nalezeno.

Máme-li

$$u = xyz,$$

jest

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy,$$

a tedy

$$du = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz,$$

jako v čl. 62.

Pro

$$u = \frac{x}{y}$$

máme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2},$$

a tedy

$$du = \frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

jako v čl. 62.

Konečně pro $u = x^y$ máme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \log x,$$

a tedy

$$du = yx^{y-1}\,dx + x^y \log x\,dy,$$

jako v čl. 64.

90. **Totálný differenciál funkce složené.**

Budiž u obecně funkce n proměnných

$$u = f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

jež opět jsou funkcemi m proměnných $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$; tím jest u složená funkce proměnných ξ.

Parciálnou derivací $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$ rozumíme derivaci stanovenou za té supposice, že $\xi_2, \ldots \xi_m$ jsou hodnoty stálé, že tedy u pokládáme za funkci složenou z funkcí $x_1, x_2, \ldots x_n$ jedné proměnné ξ_1; dle předchozího článku tudíž máme

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi_1},$$

a ovšem obdobně

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_m} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_m} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi_m}.$$

Znásobíme-li tyto částečné derivace resp. differenciály $d\xi_1$, $d\xi_2, \ldots d\xi_m$ a sečteme-li součiny, obdržíme v levo totálný differenciál du a na pravo sečítáním dle sloupců:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\,d\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial x_2}\,d\xi_2 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_m}\,d\xi_m\right)$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\,d\xi_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\,d\xi_2 + \ldots + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_m}\,d\xi_m\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(\frac{\partial x_n}{\partial \xi_{s1}}\,d\xi_{s1}+\frac{\partial x_n}{\partial \xi_{s2}}\,d\xi_{s1}+\cdots+\frac{\partial x_n}{\partial \xi_{sm}}\,d\xi_{sm}\right).$$

V závorkách stojí patrně totálné differenciály funkcí x_1, $x_2, \ldots x_n$, čímž

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\,dx_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\,dx_n,$$

t. j. *totálný differenciál složené funkce se rovná součtu jejích parciálných differenciálů tak stanovených, jako by* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *byly neodvisle proměnné*; zde ale dx_1, $dx_2, \ldots dx_n$ značí ovšem totálné differenciály funkcí $x_1, x_2, \ldots x_n$.

91. Totálné differenciály vyšších řádů.

Druhým totálným differenciálem funkce více neodvisle proměnných rozumíme totálný differenciál prvního totálného differenciálu stanovený tím způsobem, že pokládáme differenciály neodvisle proměnných za stálé.

Třetím totálným differenciálem rozumíme totálný differenciál druhého totálného differenciálu, při čemž differenciály neodvisle proměnných zase pokládáme za stálé, atd.

N. p. pro funkci u dvou neodvisle proměnných x, y máme

$$du=d_x u+d_y u;$$

parciálné differenciály tohoto totálného differenciálu jsou

$$d_x du=d_x^2 u+d_x d_y u,$$

$$d_y du=d_y d_x u+d_y^2 u,$$

a jich součet jest druhý totálný differenciál d^2u. Vzhledem ku

$$d_y d_x u=d_y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy.$$

$$d_x d_y u=d_x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,dx\,dy,$$

a tedy

$$d_x d_y u=d_y d_x u,$$

máme

$$d^2u=d_x^2 u+2d_x d_y u+d_y^2 u$$

čili

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2+2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2.$$

Totéž obdržíme, stanovíme-li totálný differenciál differenciálu

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

pokládajíce dx a dy za stálé; tím

$$\begin{aligned} d^2u &= dx\,d\frac{\partial u}{\partial x} + dy\,d\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= dx\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dy\right) + dy\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy\right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2, \end{aligned}$$

jako nahoře.

Opětným differencováním při stálých dx, dy nalézáme

$$\begin{aligned} d^3u &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy + 3\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\,dy^3 \\ &= d_x^3 u + 3d_x^2 d_y u + 3d_x d_y^2 u + d_y^3 u, \end{aligned}$$

což možno symbolicky psáti

$$\begin{aligned} d^3u &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^3 u \\ &= (d_x + d_y)^3 u; \end{aligned}$$

a obecně symbolicky

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\,dz + \ldots\right)^n u = (d_x + d_y + d_z + \ldots)^n u,$$

je-li u funkcí neodvisle proměnných x, y, z, . .

Jest-li u funkce složená z hodnot x_1, x_2, . . x_n, které samy jsou funkce neodvisle proměnných ξ_1, ξ_2, . . ξ_m, nutno při počítání vyšších totálných differenciálů d^2u, d^3u, . . míti na paměti, že differenciály neodvisle proměnných $d\xi_1$, $d\xi_2$, . . $d\xi_m$ pokládáme za stálé, nikoli však differenciály funkcí x_1, x_2, . . x_n, které dle

$$dx_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial \xi_1}\,d\xi_1 + \ldots + \frac{\partial x_\nu}{\partial \xi_m}\,d\xi_m$$

obecně nejsou stálé, nýbrž funkce hodnot ξ_1, ξ_2, . . ξ_m.

Mějme na př. $u = x^2 + y^2$, kde x, y značí funkce dvou neodvisle proměnných ϱ, ω:

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega.$$

Zde

$$du = 2x\,dx + 2y\,dy,$$
$$d^2u = 2(dx^2 + dy^2) + 2(x\,d^2x + y\,d^2y).$$

Chceme-li do těchto dvou totálných differenciálů zavésti proměnné ϱ, ω, musíme za dx, dy, d^2x, d^2y vložiti jich hodnoty

$$dx = \cos\omega\,d\varrho - \varrho\sin\omega\,d\omega, \quad dy = \sin\omega\,d\varrho + \varrho\cos\omega\,d\omega,$$
$$d^2x = -2\sin\omega\,d\varrho\,d\omega - \varrho\cos\omega\,d\omega^2,$$
$$d^2y = 2\cos\omega\,d\varrho\,d\omega - \varrho\sin\omega\,d\omega^2,$$

při jichž stanovení jsme $d\varrho$, $d\omega$ pokládali za stálé; tím nalezneme

$$du = 2\varrho\,d\varrho, \quad d^2u = 2d\varrho^2,$$

což vzhledem k $u = \varrho^2$ jest správné.

92. Věta Taylorova pro funkce více proměnných.

Budiž

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

funkce více proměnných a uvažujme přírůst její

$$\Delta u = f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l, \ldots) - f(x_0, y_0, z_0, \ldots),$$

příslušný přechodu od hodnot x_0, y_0, z_0, .. k hodnotám $x_0 + h$, $y_0 + k$, $z_0 + l$, . . ; jde o rozvoj tohoto přírůstu postupující dle mocností přírůstů h, k, l, . .

Učiníme-li v u

$$x = x_0 + ht, \quad y = y_0 + kt, \quad z = z_0 + lt, \ldots,$$

stane se u funkcí jedné proměnné t, složenou z x, y, z, . . :

$$u = f(x, y, z, \ldots) = F(t);$$

speciálně máme

$$F(0) = f(x_0, y_0, z_0, \ldots), \quad F(1) = f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l, \ldots),$$

tak že zmíněný přírůst $\Delta u = F(1) - F(0)$.

Má-li $f(x, y, z, \ldots)$ všecky derivace až do n-té, má také $F(t)$ posloupné derivace až do n-té, a s. se tyto vypočtou dle čl. 89. Nejprve

$$F'(t) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \ldots;$$

avšak

$$\frac{dx}{dt} = h, \frac{dy}{dt} = k, \frac{dz}{dt} = l, \ldots,$$

čímž

$$F'(t) = \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial u}{\partial z} l + \ldots,$$

což možno symbolicky psáti

$$F'(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \ldots\right) u,$$

kde tedy symbol na pravé straně značí součet parciálných derivací funkce u násobených resp. hodnotami h, k, l, . .

Opětným derivováním nalezneme

$$\begin{aligned} F''(t) = {} & h \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial u}{\partial z} l + \ldots\right) \\ & + k \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial u}{\partial z} l + \ldots\right) \\ & + l \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial u}{\partial z} l + \ldots\right) + \ldots \\ = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} k^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} l^2 + \ldots \\ & + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} hk + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} hl + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} kl + \ldots, \end{aligned}$$

aneb symbolicky

$$F''(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \ldots\right)^2 u,$$

a obecně

$$F^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \ldots\right)^n u,$$

kde nutno n-tou mocnost rozvinouti dle věty polynomické tak, jako by $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, . . byly zlomky, a vycházející součiny tvaru $\frac{\partial^n}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} u$ nahraditi derivacemi $\frac{\partial^n u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$.

Z toho patrno, že $F^{(n)}(t)$ se jeví jakožto celistvá homogenní funkce n-ho stupně hodnot h, k, l . ., jejíž koefficienty jsou částečné derivace n-ho řádu funkce $u = f(x, y, z, \ldots)$, v nichž x, y, z, . . mají hodnoty $x_0 + ht$, $y_0 + kt$, $z_0 + lt$, . .

Užijíme-li nyní Mac-Laurinovy formule (čl. 73.)

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{|1}F'(0) + \frac{1}{|2}F''(0) + \ldots + \frac{1}{|n-1}F^{(n-1)}(0) + \frac{1}{|n}F^{(n)}(\vartheta), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

a vložíme-li za $F(0)$, $F'(0)$, . . $F^{(n-1)}(0)$ jich hodnoty, plynoucí z vypočtených, klademe-li x_0, y_0, z_0, . . za x, y, z, . . , a za $F(1)$ též jeho hodnotu, máme žádaný rozvoj

$$(1) \quad f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l, \ldots) = f(x_0, y_0, z_0, \ldots) + \frac{1}{|1}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k + \frac{\partial}{\partial z}l + \ldots\right)u_0 + \frac{1}{|2}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k + \frac{\partial}{\partial z}l + \ldots\right)^2 u_0 + \ldots + \frac{1}{|n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k + \frac{\partial}{\partial z}l + \ldots\right)^{n-1} u_0 + R_n,$$

kde index 0 k liteře u připojený značí, že ve všech členech symbolicky vyznačených po jich vyčíslení nutno x, y, z, . . nahraditi hodnotami x_0, y_0, z_0, . ., a kde *zbytek* R_n jest dán formulí

$$(2) \quad R_n = \frac{1}{|n}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k + \frac{\partial}{\partial z}l + \ldots\right)^n u_\vartheta, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

při čemž index ϑ při u značí, že po vyčíslení tohoto symbolického výrazu nutno hodnoty x, y, z, . . nahraditi resp. hodnotami $x_0 + \vartheta h$, $y_0 + \vartheta k$, $z_0 + \vartheta l$, . ., v nichž ϑ značí číslo mezi 0 a 1 položené.

Speciálně pro funkci $f(x, y)$ dvou proměnných máme, píšíce na pravo f místo u,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)_0 + \frac{1}{|2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right)_0 + \ldots + \frac{1}{|n-1}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}h^{n-1} + (n-1)\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2}\,\partial y}h^{n-2}k + \ldots + \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}k^{n-1}\right)_0 + R_n,$$

a

$$R_n = \frac{1}{|n}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}h^n + n\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\,\partial y}h^{n-1}k + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\,dy^2}h^{n-2}k^2 + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}k^n\right)_\vartheta,$$

kde index 0 opět značí, že v příslušném výrazu nutno x, y nahraditi hodnotami x_0, y_0, a index ϑ, že nutno x, y nahraditi hodnotami $x_0 + \vartheta h$, $y_0 + \vartheta k$, a kde o hodnotě ϑ jen tolik víme, že $0 < \vartheta < 1$.

Platnost rozvoje Mac-Laurinova pro $F(1)$ užitého se opírala o konečnost derivací $F'(t)$, $F''(t)$, . . $F^{(n)}(t)$ od $t = 0$ do $t = 1$, a ovšem i spojitost funkce $F(t)$; to ale jest vše zabezpečeno spojitostí funkce $f(x, y, z\ .\ .)$ a jejích derivací částečných až včetně řádu n-ho pro všecky hodnoty x, y, z, . . od hodnot x_0, y_0, z_0, . . do hodnot $x_0 + h$, $y_0 + k$, $z_0 + l$, . ., *a za těchto supposic platí tedy formule Taylorova* (1). *Platí-li tyto supposice pro každé n a jest-li mimo to* $\lim_{n=\infty} R_n = 0$, *platí nekonečný Taylorův rozvoj*

$$(3)\quad f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l, \ldots) = f(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \ldots\right) f_0 + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \ldots\right)^2 f_0 + \ldots$$

Formule Taylorova (1) přejde do Mac-Laurinovy, klademe-li speciálně $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, . . a píšeme-li x, y, z, . . místo h, k, l, . . Tím nabýváme Mac-Laurinovy formule

$$(4)\quad f(x, y, z, \ldots) = f(0,0,0, \ldots) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_0 z^2 + \ldots + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0 xy + \ldots\right] + \ldots + \frac{1}{\underline{|n-1}}\left[\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right)_0 x^{n-1} + \ldots\right] + R_n,$$

kde

$$(5)\quad R_n = \frac{1}{\underline{|n}}\left[\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_\vartheta x^n + \left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)_\vartheta y^n + \ldots + n\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}\right)_\vartheta x^{n-1} y + \ldots\right],$$

a index 0 značí, že nutno v příslušné derivaci nahraditi x, y, z, . . nullami, index ϑ pak hodnotami ϑx, ϑy, ϑz, . ., kde $0 < \vartheta < 1$.

Rozvoji (3) možno dáti jednoduchý tvar zavedením totálných differenciálů funkce $f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$; učiníme-li $dx_0 = h$,

$dy_0 = k$, $dz_0 = l$, . ., jest dle čl. 91.

$$d^n f_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \ldots\right)^n f_0,$$

a tedy možno (3) psáti

$$\Delta u = \Delta f_0 = df_0 + \frac{d^2 f_0}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 f_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots,$$

čímž přírůst funkce více proměnných vyjádřen jejími totálnými differenciály a s. touže formulí, kterou jsme vyjádřili přírůst funkce jedné proměnné v čl. 72.

Jest-li funkce $f(x, y, z, \ldots)$ racionálná celistvá funkce n-ho stupně, jsou její částečné derivace n-ho řádu vesměs stálé, a tedy vyšší derivace 0; rozvoj Taylorův (3) jest tedy pak konečný, a s. končí členem n-ho stupně v přírůstcích h, k, l, . .; a také opak jest patrný.

93. Existence implicitní funkce jedné proměnné a jejích derivací.

Jakož jsme již podotkli (čl. 37. a 44.), může funkce y jedné proměnné x býti dána *implicitně*, t. j. rovnicí $f(x, y) = 0$, jíž má hověti. Přihlédněme nyní k výminkám, za kterými jedna rovnice mezi dvěma proměnnými stanoví jednu jakožto funkci druhé, a k výminkám, za kterými tak stanovená funkce implicitní má derivace.

V té příčině platí věta*):

*Budiž $f(x, y) = 0$ daná rovnice a x_0, y_0 dvě hodnoty proměnných jí hovící. Dále budiž f i s prvními parciálnými derivacemi f'_x, f'_y v okolí místa x_0, y_0***) spojitá, a konečně budiž $f'_y(x_0, y_0) \gtrless 0$; pak existuje funkce y proměnné x, $y = \varphi(x)$ a jen jediná, jež v okolí uvažovaného místa hoví dané rovnici, tak že pro každé x jeho platí $f(x, \varphi(x)) = 0$, a jež pro $x = x_0$ nabývá hodnoty $y = y_0$. Tato funkce $y = \varphi(x)$ jest spojitá a má určitou a konečnou derivaci.*

Buďte h_1, k_1 dvě kladná čísla tak volená, že pro každé x mezi $x_0 - h_1$ a $x_0 + h_1$ a pro každé y mezi $y_0 - k_1$ a $y_0 + k_1$ jest f i s derivacemi f'_x, f'_y spojitá. Hodnoty h_1, k_1 volme záro-

*) *U. Dini* v Analisi infinitesimale vytknul tuto větu, jejíž důkaz podán dle *Genocchi-Peano*, l. c. pag. 138.

**) t. j. pro všecky hodnoty x, y, činící $|x - x_0|$, $|y - y_0|$ menší než určitá kladná čísla.

veň tak malé, že $f'_x(x, y)$ jest stále číselně menší než libovolné kladné číslo A a že $f'_y(x, y)$, kteráž funkce pro $x = x_0$, $y = y_0$ dle supposice nevymizí, jest číselně stále větší než určité kladné číslo B. Patrně můžeme i předpokládati, že $Ah_1 < Bk_1$ vzhledem k tomu, že h_1 možno voliti libovolně malé.

Dle věty Taylorovy pro funkci dvou proměnných $f(x, y)$ a vzhledem k $f(x_0, y_0) = 0$ máme

$$(6) \qquad \begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= h f'_x(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) \\ &+ k f'_y(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k), \quad 0 < \vartheta < 1. \end{aligned}$$

Béřeme-li v této formuli $|h| \leqq h_1$, $|k| \leqq k_1$, tu $x_0 + \vartheta h$ jest mezi $x_0 - h_1$ a $x_0 + h_1$, a $y_0 + \vartheta k$ mezi $y_0 - k_1$ a $y_0 + k_1$; pročež

$$|f'_x(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)| < A, \quad |h f'_x(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)| < h_1 A$$

Dále jest stále $|k f'_y(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k))| > k_1 B$, a tedy jest v (6) na pravé straně první sčítanec číselně menší než druhý, a má tedy pravá strana totéž znamení jako druhý sčítanec. Tento ale pro $k = + k_1$ a pro $k = - k_1$ má různá znamení, neboť součinitel $f'_y(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)$ má stále totéž znamení. Funkce $f(x_0 + h, y_0 + k)$, která tedy pro $k = + k_1$ a $k = - k_1$ nabývá různě označených hodnot, jest jakožto funkce proměnné k spojitou, a tedy vymizí pro hodnotu k mezi $+ k_1$ a $- k_1$ položenou (čl. 42.); při pevném h existuje jediná taková hodnota k, neboť ze supposic

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = 0 \quad \text{a} \quad f(x_0 + h, y_0 + k') = 0$$

by dle věty Rolle-ovy (článek 68.) plynulo, že také derivace $f'_y(x_0 + h, y_0 + k'') = 0$ pro jisté k'' mezi y a y' položené, věc vyloučená, poněvadž $f'_y(x, y)$ nevymizí pro žádné hodnoty x, y uvažovaného oboru.

K libovolné hodnotě x intervallu $(x_0 - h_1 \ldots x_0 + h_1)$ existuje tedy vždy jedna a jen jedna hodnota y mezi $y_0 - k_1$ a $y_0 + k_1$ položená, která hoví rovnici $f(x, y) = 0$ a která pro $x = x_0$ nabývá hodnoty $y = y_0$, neboť z (6) pro $h = 0$ plyne také $k = 0$. Souhrn těchto hodnot y tvoří spojitou funkci, poněvadž se hodnoty ty od y_0 liší o méně než o k_1, které číslo možno voliti libovolně malým.

Tímto způsobem stanovená funkce y proměnné x má pro $x = x_0$ derivaci. Udělíme-li totiž x hodnotu $x_0 + h$ a nazveme-li

$y_0 + k$ příslušnou hodnotu y, tedy máme

$$f(x_0 + h,\ y_0 + k) = 0,$$

t. j. dle (6)

$$h f'_x(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta k) + k f'_y(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta k) = 0,$$

odkud

$$\frac{k}{h} = -\frac{f'_x(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta k)}{f'_y(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta k)}.$$

Pro $\lim h = 0$ jest vzhledem k spojitosti funkce y také $\lim k = 0$, a vzhledem k supponované spojitosti parciálných derivací

$$\lim f'_x(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta h) = f'_x(x_0,\ y_0),$$
$$\lim f'_y(x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta k) = f'_y(x_0,\ y_0) \gtrless 0.$$

Má tedy podíl přírůstů $\frac{k}{h}$ určitou konečnou limitu

$$\lim \frac{k}{h} = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x_0,\ y_0)}{f'_y(x_0,\ y_0)}.$$

Volíme-li za x jinou hodnotu než x_0 a označíme-li y příslušnou hodnotu funkční, bude vždy, dokud $f'_y(x, y)$ nevymizí. platiti

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

čímž existence derivace dokázána a ona sama vyjádřena jakožto funkce složená z x a y, při čemž y jest nahoře stanovená, zcela určitá funkce proměnné x.

Jsou-li i druhé a vyšší parciálné derivace funkce $f(x, y)$ spojité, má y i vyšší derivace, neboť pak dovoleno nalezenou složenou funkci dále derivovati, čímž bychom ony vyšší derivace skutečně obdrželi. Rychleji dojdeme cíle, uvážíme-li že $f(x, y)$ jest složená funkce, závislá venkoncem na jedné proměnné x, a mající stále hodnotu 0; jest tudíž i její derivace 0 t. j.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

odkud by plynula hořejší hodnota pro $\frac{dy}{dx}$.

Levá strana této rovnice jest složena ze tří hodnot x, y, $\frac{dy}{dx}$, jež samy jsou funkce x mající derivace, pročež opětným derivo-

váním obdržíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

odkud plyne, vzhledem k $\frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0$, druhá derivace $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Dalším derivováním této rovnice obdržíme rovnice, z nichž posloupně vypočteme $\frac{d^3y}{dx^3}$, . ., u kterýchž hodnot se vyskytuje stále týž koefficient $\frac{\partial f}{\partial y}$ různý od nully.

Jest-li funkce y definovaná n. p. rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

máme, pokládajíce levou stranu za funkci složenou, jejíž hodnota jest stále 1, derivováním a krácením 2

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y};$$

dalším derivováním

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

odkud, vložíme-li za $\frac{dy}{dx}$ vypočtenou hodnotu a přihlédneme-li k dané rovnici,

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}\left(1 + \frac{b^2x^2}{a^2y^2}\right) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{a^2b^2}{a^2y^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Dalším derivováním poslední rovnice a krácením $\frac{1}{b^2}$,

$$3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

odkud bychom vypočetli třetí derivaci, atd.

94. Implicitní funkce více proměnných.

Jest-li obecněji rovnici

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, x) = 0$$

mezi $m + 1$ proměnnou x_1, x_2, . . x_m, x vyhověno soustavou

hodnot $a_1, a_2, \ldots a_m$, α a jest-li v okolí této soustavy funkce f i se všemi prvními derivacemi spojitá, mimo to $\frac{\partial f}{\partial x}$ pro tuto soustavu různá od nully, pak existuje funkce $x = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_m)$ a jen jediná v okolí místa $a_1, a_2, \ldots a_m$, jež vložena za x do $f = 0$ této rovnici hoví pro všecky hodnoty proměnných; funkce ta jest spojitá, nabývá pro $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots x_m = a_m$ hodnoty $x = a$, a má parciálné derivace prvního řádu.

Důkaz této věty možno provésti podobně jako důkaz v předešlém článku, k čemuž zde však budiž jen poukázáno*).

Parciálné derivace funkce x samy možno z dané rovnice ihned vypočítati; pokládáme-li $x_2, \ldots x_m$ za stálé, máme dle předchozího článku

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} = 0,$$

a obdobně

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_m} = 0,$$

odkud vzhledem k $\frac{\partial f}{\partial x} \gtrless 0$ žádané parciálné derivace $\frac{\partial x}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial x}{\partial x_m}$.

Má-li f také spojité parciálné derivace vyšších řádů, má i x parciálné derivace vyšších řádů, které vypočteme z rovnic plynoucích opětným derivováním rovnic právě odvozených dle všech neodvisle proměnných. Tím obdržíme z rovnice první

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x_2}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

. . . . . .

z nichž vypočteme druhé derivace $\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_m}$; a derivováním dalších hořejších rovnic ostatní druhé derivace, a t. d.

*) *Genocchi-Peano*, l. c. pag. 141.

95. Více implicitních funkcí současnými rovnicemi definovaných.

Dvěma rovnicemi mezi třemi proměnnými

$$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

vyplněnými hodnotami x_0, y_0, z_0, jsou y a z definovány jakožto funkce jedné proměnné x v jistém okolí místa $x = x_0$, za supposice, že F a f i se svými prvními parciálnými derivacemi jsou spojité a že mimo to pro $x = x_0$ nevymizí determinant

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y},$$

a funkce ty mají derivaci; k důkazu budiž jen poukázáno (l. c. pag. 144).

Derivace $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ obdržíme, derivujeme-li F a f jakožto funkce jedné proměnné x složené z x, y, z; tím máme dvě rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0,$$

lineárné vzhledem k hledaným derivacím, z nichž tyto možno vypočítati, poněvadž determinant z koeficientů neznámých vzhledem k supposici jest různý od nully i v jistém okolí místa x_0.

Mají-li F a f i druhé parciálné spojité derivace, možno tyto rovnice opět derivovati; tím obdržíme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\frac{dz}{dx}$$
$$+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

a obdobnou rovnici, v níž stojí f místo F. Rovnice tyto jsou lineárné vzhledem k $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, jež z nich možno vypočítati, jelikož determinant již zmíněný jest různý od nully, atd.

Nejobecnější případ v příčině stanovení implicitních funkcí jest ten, že dána soustava n rovnic mezi $m + n$ proměnnými

(7) $f_1(x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots y_n) = 0, \ldots f_n(x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots y_n) = 0,$

jemuž hoví soustava hodnot

$$a_1, \ldots a_m, b_1, \ldots b_n;$$

funkce $f_1 \ldots f_n$ buďte i se svými parciálnými derivacemi prvního řádu spojité v okolí místa $a_1, \ldots a_m$. $b_1, \ldots b_n$ a mimo to budiž determinant

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}, \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}, \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}, \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

na onom místě různý od nully. Pak existuje jedna a jen jedna soustava funkcí proměnných x:

$$y_1 = \psi_1(x_1, \ldots x_m), \ldots y_n = \psi_n(x_1, \ldots x_m)$$

definovaná v okolí místa $a_1, \ldots a_m$ a hovící rovnicím (7) pro všecka $x_1, \ldots x_m$ tohoto okolí, a s. jsou $y_1, \ldots y_n$ funkce spojité nabývající v místě $a_1, \ldots a_m$ hodnot $b_1, \ldots b_n$ a mající všecky derivace prvního řádu *).

Determinant J sluje *determinantem funkcionálným* č. *Jacobi-ho* n funkcí f vzhledem k n proměnným y.

Parciálné derivace implicitních funkcí y, jichž existenci právě vyslovená věta zaručuje, snadno obdržíme, uvážíme-li, že funkce f jsou funkce neodvisle proměnných $x_1, \ldots x_m$ složené z těchto a z hodnot $y_1, \ldots y_n$, na nich závislých. Derivujeme-li tedy rovnice (7) dle pravidla pro derivování funkcí složených platného a s. dle proměnné x_ν, obdržíme n rovnic

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_\nu} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_\nu} = 0,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_n}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_n}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_\nu} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_\nu} = 0,$$

lineárných vzhledem k hledaným derivacím $\frac{\partial y_1}{\partial x_\nu}, \ldots \frac{\partial y_n}{\partial x_\nu}$, v nichž zároveň determinant z koefficientů neznámých jest J a tedy různý od nully. Řešení jich jest známé.

Mají-li $f_1, \ldots f_n$ spojité parciálné derivace vyšších řádů, možno na novo derivovati a z obdržených rovnic vypočísti druhé a vyšší parciálné derivace implicitních funkcí $y_1, \ldots y_n$.

*) Důkaz v l. c., pag. 148.

Rovnice n. p.

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

definuje z jakožto implicitní funkci dvou proměnných x, y. Derivujeme-li parciálně dle x a dle y, máme krátivše 2,

$$x + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad y + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

derivujeme-li první rovnici dle x a dle y, druhou dle y, obdržíme další tři rovnice

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Z těchto pěti rovnic bychom nyní posloupně snadno vypočetli obě první a tři druhé parciálné derivace funkce z, což zůstaveno budiž čtenáři.

Ostatně možno také danou rovnici differencovati, čímž

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

a odtud totálný differenciál

$$dz = -\frac{x}{z}\,dx - \frac{y}{z}\,dz;$$

z něho soudíme, že

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Differencujeme-li na novo, majíce na paměti, že differenciály dx, dy neodvisle proměnných jsou stálé, obdržíme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + z\,d^2z = 0,$$

a tedy pro druhý totálný differenciál

$$d^2z = -\frac{1}{z}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$= -\frac{1}{z^3}[(x^2 + z^2)\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (y^2 + z^2)\,dy^2].$$

z čehož (čl. 91.) soudíme, že

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}.$$

A podobně by se vypočetly vyšší parciálné derivace funkce z.

96. Inverse řady mocninné.

Jest-li hodnota ξ definována jakožto funkce proměnné y rovnicí

$$\xi = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdot\cdot,$$

kde řada mocninná konverguje pro $|y| < R$, vzniká úkol inverse této řady, t. j. vyjádření hodnoty y jakožto funkce ξ.

Zavedeme-li novou proměnnou x rovnicí $\xi - c_0 = x$, máme rovnici definující implicitní funkci y proměnné x:

$$f(x, y) = -x + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + \cdot\cdot = 0.$$

Pro $x = 0$ jest $y = 0$; vzhledem k spojitosti parciálných derivací

$$f'_x(x, y) = -1, \quad f'_y(x, y) = c_1 + 2c_2 y + 3c_3 y^2 + \cdot\cdot, \quad |y| < R$$

jest za supposice $f'_y(0, 0) = c_1 \gtrless 0$ implicitní funkce y v okolí místa $x = 0$ spojitou a má derivaci.

Poněvadž i vyšší parciálné derivace funkce $f(x, y)$

$$f''_{xx}(x, y) = 0, \quad f''_{xy}(x, y) = 0, \quad f''_{yy}(x, y) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 y + \cdot\cdot,$$

atd. jsou při $|y| < R$ konečné a spojité (čl. 74.), má implicitní funkce y, dokud $f'_y(x, y)$ nevymizí, všecky vyšší derivace $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdot\cdot$ konečné a spojité. Dokud tedy $c_1 + 2c_2 y + 3c_3 y^2 + \cdot\cdot$ jest hodnota různá od nully, platí pro y konečný rozvoj Mac-Laurinův, případně — při $\lim R_n = 0$ — i nekonečný.

Poukazujíce v příčině existence nekonečného rozvoje implicitní funkce y na příslušnou větu *), podotkněme jen, že rozvoj ten

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdot\cdot$$

formálně snadno obdržíme, vložíme-li jej do relace $f(x, y) = 0$ a seřadíme-li dle mocností proměnné x (čl. 57.); pak musí, dle věty o neurčitých koefficientech (čl. 70.), koefficienty u všech mocností x vymizeti, čímž nabýváme relací

$$-1 + c_1 a_1 = 0,$$
$$c_1 a_2 + c_2 a_1^2 = 0,$$

*) *O. Stolz*, Grundzüge der Differential- u. Intergralrechnung, t. I, pag. 162 sqq.

$$c_1 a_3 + 2c_2 a_1 a_2 + c_3 a_1^3 = 0,$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

z nichž vzhledem k $c_1 \gtrless 0$ plynou posloupně $a_1, a_2 \ldots$

Vyjdeme-li n. p. z rovnice

$$-x + y + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \cdots = 0,$$

kterou možno psáti

$$1 + x = e^y,$$

obdržíme naznačenou methodou snadno rozvoj funkce

$$y = \log (1 + x)$$

v čl. 77. odvozený.

97. **Vznik differenciálných rovnic obyčejných.**

Differenciálnou rovnicí zoveme relaci mezi neodvisle proměnnými, mezi jich funkcemi a derivacemi těchto funkcí; vyskytují-li se v takové rovnici jen derivace funkcí jedné proměnné, sluje differenciálná rovnice obyčejnou, vyskytují-li se derivace funkcí více proměnných, tedy derivace parciálné, sluje differenciálná rovnice parciálnou. Řádem differenciálné rovnice nazýváme řád nejvyšší derivace v ní se vyskytující.

Derivováním každé relace mezi proměnnými vzniká rovnice differenciálná, a taktéž kombinováním původních relací a oněch, jež z nich derivováním odvodíme. Máme-li n. p. relaci

$$y = u^m,$$

kde u značí funkci proměnné x, obdržíme derivováním differenciálnou rovnici prvního řadu

$$\frac{dy}{dx} = mu^{m-1} \cdot u';$$

z této a původní rovnice snadno odvodíme differenciálnou rovnici

$$u \frac{dy}{dx} = myu',$$

v níž se vyskytuje u v první mocnosti, a které ovšem hoví funkce $y = u^m$.

Máme-li n. p.

$$y = \arcsin x,$$

jest

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ čili } \sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = 1$$

differenciálná rovnice, které hoví daná funkce; rovnice ta jest v tom jednodušší, že jest vzhledem k x a k derivaci algebraická. Ale i irracionality se zhostíme opětným derivováním; tím obdržíme totiž

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{dy}{dx} = 0$$

čili

$$(1-x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - x\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

t. j. differenciálnou rovnici druhého řádu, jíž ovšem hoví $y = \text{arc sin } x$.

Kombinováním daných rovnic a oněch, jež z nich derivováním plynou, možno se zbaviti stálých hodnot ano i celých funkcí v původních rovnicích se vyskytujících. Toť pravý vznik rovnic differenciálných, pro počet integrálný důležitý, k němuž nyní přihlédneme, a to nejprve vzhledem k obyčejným rovnicím differenciálným.

Budiž

$$f(x, y, C) = 0 \tag{8}$$

relace definující implicitní funkci y proměnné x, a obsahující libovolnou stálou C. Derivováním obdržíme

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 0, \tag{9}$$

a eliminací stálé C z rovnic (8) a (9) differenciálnou rovnicí prvního řádu

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{10}$$

Rovnici této hoví každá funkce y daná rovnicí (8), nechť má C jakoukoli hodnotu; vzhledem k ní sluje (8) *rovnicí původní neb primitivní neb integrálnou.*

Dána-li obecněji soustava n rovnic mezi $n+1$ proměnnou $x, y, z, u, \ldots$, obsahujících n stálých $a, b, c, \ldots$

$$\left|\begin{array}{l} f_1(x, y, z, u, \ldots a, b, c, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x, y, z, u, \ldots a, b, c, \ldots) = 0, \end{array}\right. \tag{11}$$

a definujících $y, z, u, \ldots$ jakožto implicitní funkce proměnné x, obdržíme jich derivováním dle x

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{dz}{dx} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x} + \dfrac{\partial f_n}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial f_n}{\partial z}\dfrac{dz}{dx} + \ldots = 0. \end{cases}$$

Eliminací n stálých $a, b, c, \ldots$ z $2n$ rovnic (11) a (12) možno obecně odvoditi n rovnic differenciálných prvního řádu

$$(13)\qquad \begin{cases} F_1\left(x, y, z, u, \ldots \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{du}{dx}, \ldots\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n\left(x, y, z, u, \ldots \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{du}{dx}, \ldots\right) = 0. \end{cases}$$

Této soustavě simultanních č. soudobých rovnic differenciálných hoví funkce $y, z, u, \ldots$ definované rovnicemi (11), nechť mají v nich stálé $a, b, c, \ldots$ jakékoli hodnoty; rovnice (11) slují vzhledem k rovnicím (13) rovnice primitivní neb integrálné.

Dána-li jedna rovnice mezi dvěma proměnnými x, y, obsahující n stálých $a, b, c, \ldots$

$$(14)\qquad f(x, y, a, b, c, \ldots) = 0,$$

a definující y jakožto funkci x, derivujme ji n-krát, čímž obdržíme n rovnic

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Z rovnic (14) a (15) možno obecně eliminovati n stálých $a, b, c, \ldots$ a tím odvoditi differenciálnou rovnici n-ho řádu

$$(16)\qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

jíž hoví funkce y definovaná rovnicí (14), nechť v ní mají stálé $a, b, c, \ldots$ jakékoli hodnoty; rovnice (14) sluje vzhledem k rovnici (16) opět primitivní rovnicí, jejíž stanovení při dané rovnici (16) jest úkolem počtu integrálného.

Obdobně by se i ze soustavy n rovnic (11), obsahujících více než n stálých odvodila soustava simultanních differenciálných rovnic vyšších řádů.

N. p. rovnice kružnice

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0 \tag{17}$$

definuje y jakožto funkci x, a obsahuje tři stálé a, b, r.

Derivováním obdržíme

$$x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}=0, \tag{18}$$

což jest differenciálná rovnice, v níž se již stálá r nevyskytuje.

Z rovnic (17) a (18) možno a neb b eliminovati; eliminujeme-li a, obdržíme differenciálnou rovnici

$$(y-b)^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]-r^2=0,$$

jíž hoví každá funkce y daná relací (17), nechť má a jakoukoli hodnotu.

Derivováním rovnice (18) odpadá a a máme differenciálnou rovnici druhého řádu

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}=0, \tag{19}$$

které hoví funkce y daná rovnici (17), nechť mají a a r jakékoli hodnoty, a jejíž primitivní rovnice jest (17).

Derivujeme-li (19), obdržíme

$$3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+(y-b)\frac{d^3y}{dx^3}=0 \tag{20}$$

a eliminací b neb lépe hodnoty $y-b$ z (19) a (20) plyne differenciálná rovnice třetího řádu

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0, \tag{21}$$

jíž hoví každá funkce y daná primitivní rovnicí (17), nechť mají tři stálé a, b, r jakékoli hodnoty.

98. **Vznik parciálných differenciálných rovnic lineárných prvního řádu.**

Buďte x, y neodvisle proměnné a z jich funkce definovaná relací

(22) $$\Phi(u, v) = 0,$$

v níž u, v značí *dané* funkce proměnných x, y, z, a Φ *libovolnou* funkci argumentů u, v. Snadno odvodíme parciálnou differenciálnou rovnici prvního řádu, které funkce z hoví, nechť jest Φ jakákoli funkce u, v.

Klademe-li — dle *Eulera* a *Monge-a* — za příčinou stručnosti

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

máme dle čl. 89. pro parciálné derivace funkce u dle x resp. y výrazy

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q,$$

a pro derivace funkce v

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p, \quad \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q.$$

Derivováním rovnice (22) dle x, resp. y, nyní obdržíme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.$$

Z těchto dvou vzhledem k $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ lineárných a homogenních rovnic soudíme — poněvadž nemohou obě tyto derivace současně býti stále 0 — že platí rovnice

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,$$

t. j. rovnice

(23) $$\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q = \mathrm{R},$$

klademe-li za příčinou stručnosti

$$\mathrm{P} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$R = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Veškeré funkce z definované relací $\Phi(u, v) = 0$ hoví tedy, nechť jest Φ jakákoli funkce, lineárné parciálné rovnici prvního řádu (23), v níž P, Q, R jsou funkce na Φ nezávislé. Rovnice ta sluje lineárnou, poněvadž jest lineárná vzhledem k parciálným derivacím p a q.

Obecněji a zcela obdobně vychází, že funkce z neodvisle proměnných $x_1, x_2, \ldots x_n$ definovaná rovnicí

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0,$$

kde $u_1, u_2, \ldots u_n$ značí dané funkce všech proměnných a Φ zcela libovolnou funkci, hoví parciálné lineárné rovnici prvního řádu

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n = P,$$

kde psáno p_ν místo $\frac{\partial z}{\partial x_\nu}$, a kde $P_1, P_2, \ldots P_n$, P jsou výrazy nezávislé na Φ.

99. Vznik obecných parciálných rovnic prvního řádu.

Obmezme se na případ dvou neodvisle proměnných x, y, jichž funkce jest z, a ukažme, kterak obecně vzniká parciálná rovnice prvního řádu.

Budiž α libovolná stálá č. proměnný parametr, $\varphi(\alpha)$ libovolná funkce jeho a

$$V = f[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)] \tag{24}$$

určitá funkce pěti hodnot x, y, z, α, $\varphi(\alpha)$.

Položme

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0 \tag{25}$$

a definujme funkci z tímto způsobem: myslíme-li si z rovnic (25) eliminovanou hodnotu α, obdržíme rovnici mezi proměnnými x, y, z definující z jakožto funkci proměnných x, y. Tato funkce hoví, nechť jest $\varphi(\alpha)$ jakákoli funkce, jisté parciálné rovnici prvního řádu.

Možno totiž vytčenou eliminaci tak provésti, že řešíme druhou rovnici (25) dle α, čímž se objeví α jakožto funkce x, y, z, a že do první vložíme toto α. Máme tedy rovnicí $V = 0$ definovanou funkci z, pokládáme-li v ní α za funkci x, y, z plynoucí řešením rovnice $\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0$. Vzhledem k tomu jest totálný differenciál první rovnice (25)

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{dz} dz + \frac{\partial V}{\partial \alpha} d\alpha = 0;$$

vzhledem k druhé rovnici (25) tedy máme

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = 0,$$

aneb, kladouce opět $dz = p\,dx + q\,dy$,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z}\right) dy = 0,$$

z čehož vzhledem k libovolným hodnotám dx, dy soudíme

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{26}$$

Eliminujeme-li z těchto dvou rovnic (26) a z první rovnice (25) hodnoty α a $\varphi(\alpha)$, obdržíme rovnici tvaru

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{27}$$

které hoví funkce z nahoře definovaná, nechť jest $\varphi(\alpha)$ jakákoli funkce.

Později, v počtu integrálném, shledáme, že možno každou parciálnou rovnici prvního řádu tímto způsobem odvoditi.

Máme-li n. p.

$$V = (x - \alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + z^2 - R^2,$$

kde R značí stálou,
jest

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2(x - \alpha), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2[y - \varphi(\alpha)], \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 2z,$$

a rovnice (26) jsou tedy

$$x - \alpha + pz = 0, \quad y - \varphi(\alpha) + qz = 0;$$

vypočteme-li z nich $x - \alpha = -pz$ a $y - \varphi(\alpha) = -qz$, abychom je vložili do dané rovnice $V = 0$, bude eliminace α a $\varphi(\alpha)$ vykonána a objeví se rovnice

$$(1 + p^2 + q^2)\, z^2 - R^2 = 0,$$

jakožto parciálná rovnice prvního řádu, které hoví z při každé funkci $\varphi(\alpha)$. — Vše to možno geometricky interpretovati, jakož později seznáme.

Kapitola VII.

Neurčité tvary. Zavádění nových proměnných. Homogenní funkce. Funkcionálné determinanty.

100. **Doplnění definice funkce pro zvláštní hodnoty proměnné.**

Mnohdy se stává, že výraz definující funkci pozbývá významu pro určitou hodnotu a proměnné, n. p. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pro $x = 0$.

Stane-li se, že pro $\lim x = a$ onen výraz konverguje k určité limitě, *pak limitu tu nazýváme pravou hodnotou funkce pro* $x = a$; jest přirozeno limitu tu prohlásiti za $f(a)$, a tím doplniti definici funkce $f(x)$, která pak bude spojitou pro $x = a$ (čl. 43.). Pro uvedenou funkci n. p. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \gtrless 0$, máme pro $\lim x = 0$, $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$, a tedy definujeme-li $f(0) = 1$, jest $f(x)$ definována pro každé x a pak také spojitá pro každé x.

Stane-li se, že výraz $f(x)$ pro $x = a$ pozbývá významu, a že pro $\lim x = a$ platí $\lim f(x) = \pm \infty$, pravíme stručně, že $f(a) = \pm \infty$; může se také státi, že $\lim f(x)$ má dvě různé hodnoty dle toho, blíží-li se x hodnotě a hodnotami většími neb menšími než a. Obdobně pravíme, že $f(x) = A$ pro $x = \pm \infty$, platí-li $\lim_{x = \pm \infty} f(x) = A$, a opět se mohou vyskytnouti dvě různé limity A dle toho, roste-li x do ∞ neb klesá-li do $-\infty$; a konečně

pravíme, že $f(x) = \pm\infty$ pro $x = \pm\infty$, platí-li $\lim_{x=\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (čl. 43.)

Rovnicí n. p.

$$f(x) = \frac{b_n}{x^n} + \frac{b_{n-1}}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{b_1}{x} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots,$$

kde řada $\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ konverguje pro $|x| < R$, jest definována funkce $f(x)$ pro každé x číselně menší než R, vyjma $x = 0$. Vzhledem k

$$x^n f(x) = b_n + b_{n-1}x + \ldots + b_1 x^{n-1} + a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + \ldots$$

máme

$$\lim [x^n f(x)] = b_n \text{ pro } \lim x = 0,$$

a tedy

$$\lim f(x) = \lim \frac{b_n}{x^n}.$$

Při sudém n jest, pro kladné i záporné x blížící se 0, $\lim \frac{b_n}{x^n} = \pm\infty$ souhlasně s $b_n \gtrless 0$, a tedy definujeme souhlasně $f(0) = \pm\infty$, což znamená, že pro číselně dosti malé x má $f(x)$ hodnoty číselně libovolně velké a téhož znamení jako b_n; hodnoty ty se liší od výrazu

$$\frac{b_n}{x^n} + \frac{b_{n-1}}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{b_1}{x} + a_0$$

patrně o libovolně málo.

Při lichém n máme, pro kladné x, $\lim \frac{b_n}{x^n} = \pm\infty$ souhlasně s $b_n \gtrless 0$, a pro záporné x, $\lim \frac{b_n}{x^n} = \pm\infty$ nesouhlasně s $b_n \gtrless 0$; $f(0)$ není pak určitá hodnota, a možno $f(x)$ pro $x = 0$ přisouditi jak hodnotu ∞ tak $-\infty$, opět se ale pro malé $|x|$ liší $f(x)$ od posledního výrazu o libovolně málo.

101. **Neurčitý tvar** $\frac{0}{0}$.

Dána-li funkce $f(x)$ jakožto podíl dvou funkcí

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

a stane-li se, že pro $x = a$ vymizí čitatel i jmenovatel, t. j. že

$\varphi(a) = 0$, $\psi(a) = 0$, definujeme pravou hodnotu vznikajícího neurčitého tvaru $\frac{0}{0}$ rovností:

$$f(a) = \lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ pro } \lim x = a.$$

ač-li ovšem tato limita existuje.

Mají-li $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ pro hodnotu a derivaci a není-li $\psi'(a)$ nullou, pišme (čl. 68.)

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)},$$

kde x_1 značí hodnotu mezi a a x; pro $\lim x = a$ jest také $\lim x_1 = a$ a pravá hodnota:

$$f(a) = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

t. j. *pravá hodnota se rovná hodnotě, ku které pro* $\lim x = a$ *konverguje podíl z derivace čítatele a z derivace jmenovatele daného zlomku* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, *a jsou-li derivace* $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ *pro* $x = a$ *spojité, jest pravá hodnota* $f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$.

Kdyby $\varphi'(a) = 0$, $\psi(a) = 0$, tu bychom na funkci

$$f_1(x) = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

applikovali právě odvozené pravidlo, ovšem za supposice, že druhé derivace $\varphi''(x)$, $\psi''(x)$ jsou spojité pro hodnotu a, a že $\psi''(a) \gtrless 0$; tím bychom nalezli pravou hodnotu

$$f(a) = \frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}.$$

A obecně tak nalézáme, že při spojitých derivacích až do n-té včetně a při

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi''(a) = \ldots \varphi^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$\psi(a) = \psi'(a) = \psi''(a) = \ldots \psi^{(n-1)}(a) = 0,$$

ale $\psi^{(n)}(a) \gtrless 0$, jest pravá hodnota

$$f(a) = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}.$$

Totéž ostatně podává věta Taylorova:

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \varphi'(a)\frac{h}{1} + \varphi''(a)\frac{h^2}{\underline{|2}} + \ldots + \varphi^{(n-1)}(a)\frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}}$$
$$+ \varphi^{(n)}(a+\vartheta h)\frac{h^n}{\underline{|n}};$$

vzhledem k učiněným supposicím máme

$$\varphi(a+h) = \varphi^{(n)}(a+\vartheta h)\frac{h^n}{\underline{|n}},$$

a obdobně

$$\psi(a+h) = \psi^{(n)}(a+\vartheta' h)\frac{h^n}{\underline{|n}},$$

tak že

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi^{(n)}(a+\vartheta h)}{\psi^{(n)}(a+\vartheta' h)},$$

a tedy pravá hodnota

$$f(a) = \lim_{h=0} f(a+h) = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)},$$

jako nahoře.

Při této úvaze bylo a, pro něž vznikl neurčitý tvar $\frac{0}{0}$, hodnotou konečnou; odvozené formule pro pravou hodnotu však platí i tenkráte, kdy neurčitý tvar $\frac{0}{0}$ vzniká pro $x = \pm\infty$, t. j. kdy $\lim_{x=\pm\infty} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x=\pm\infty} \psi(x) = 0$. Položíme-li totiž $x = \frac{1}{z}$, máme

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1}{z}\right)},$$

a pro $\lim x = \pm\infty$ jest $\lim z = 0$, tak že dle předchozího pravidla

$$\lim_{x=\pm\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{z=0} \frac{-\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{-\psi'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}} = \lim_{z=0} \frac{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=\pm\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)};$$

tedy i nyní se limita podílu rovná limitě podílu derivací.

Jest-li $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0$, a existuje-li $\lim_{x=\infty} \varphi'(x)$, tedy musí tento limes nutně býti 0; jinak by totiž derivace $\varphi'(x)$ pro x dosti

velké n. p. $x \geqq a$ byla vždy téhož znamení a číselně stále větší než určité kladné číslo A, a pak by formule

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x - a)\,\varphi'(x_1), \quad a < x_1 < x,$$

ukazovala, že $|\varphi(x)|$ s x roste nad každé číslo, což by se nesrovnávalo se supposicí $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0$. Týž výrok ovšem platí i pro $\lim x = -\infty$: stačí x změniti za $-x'$.

Z toho jde, že zlomek $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ se objeví v neurčitém tvaru $\frac{0}{0}$, učiníme-li $x = \infty$; přece však mnohdy vyšetření pravé jeho hodnoty jest jednodušší, než vyčíslení pravé hodnoty původního zlomku $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

Mějme n. p. funkci

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$$

nabývající pro $x = 0$ neurčitého tvaru $\frac{0}{0}$; pravá hodnota její pro $x = 0$ jest*)

$$\Big/_{x=0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \Big/_{x=0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{0}{0} = \Big/_{x=0} \frac{\sin x}{6x} = \Big/_{x=0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

N. p. $f(x) = \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$ pro $x = a$ nabývá neurčitého tvaru $\frac{0}{0}$; pravá hodnota jest

$$\lim_{x=a} f(x) = \Big/_{x=a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

N. p. $f(x) = \frac{a^x - b^x}{\alpha^x - \beta^x}$, kde a, b, α, β jsou čtyři kladné hodnoty, pro $x = 0$ nabývá tvaru $\frac{0}{0}$; pravá hodnota jest

$$\lim_{x=0} f(x) = \Big/_{x=0} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{\alpha^x \log \alpha - \beta^x \log \beta} = \frac{\log a - \log b}{\log \alpha - \log \beta}.$$

*) Zde užito substitučního znamení $\Big/_{x=0} f(x)$ naznačujícího hodnotu funkce $f(x)$ pro $x = a$, které zavedl *Sarrus* a *Cauchy*.

N. p.

$$f(x) = \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\, x}{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\, x}{\log\left(1 + x\right) - \log x}$$

pro $\lim x = \infty$ nabývá tvaru $\frac{0}{0}$, a pravá hodnota jest

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \lim \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}} = \lim \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

102. **Neurčitý tvar** $\frac{\infty}{\infty}$.

Budiž opět

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

a supponujme $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = \infty$, $\lim_{x=\infty} \psi(x) = \infty$.

Jest-li od jistého x derivace jmenovatele $\psi'(x)$ stále různá od nully a má-li podíl $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ pro $x = \infty$ určitou limitu, tedy má $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ touž limitu, která se ovšem zove pravou hodnotou funkce $f(x)$ pro $x = \infty$ *).

Pišme, značíce x_0 libovolnou kladnou hodnotu,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}},$$

ale též, pomocí věty čl. 68.,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)},$$

kdė x_1 značí hodnotu mezi x_0 a x; ze stejných výrazů na pravo soudíme, že

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} \cdot \frac{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}. \tag{1}$$

*) Sr. *Genocchi-Peano*, l. c. pag. 164 a 329, *Stolz*, Ueber Grenzwerthe der Quotienten, Mathem. Annalen, t. XIV. a XV.

Volme $x > x_0$; pak bude také $x_1 > x_0$, a volme x_0 tak velké, že se $\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$ od své limity o libovolně málo liší. Podržíme-li toto x_0 a zvětšujeme-li x do ∞, máme dle supposice $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = \infty$, $\lim_{x=\infty} \psi(x) = \infty$ a tedy

$$\lim \frac{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}} = 1.$$

Možno tedy zvoliti x tak velké, že poslední zlomek se různí od své limity 1 libovolně málo, a že tedy — vzhledem ku předposlední rovnici (1) — se $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ různí o libovolně málo od limity podílu $\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$; to ale vede k rovnosti

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

již bylo dokázati.

Rovnice ta platí i tenkráte, kdy $\lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \infty$; pak totiž volbou dosti velkého x_0 se v (1) stává $\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$ libovolně velkým, kdežto druhý faktor se přibližuje libovolně 1, stává se tedy i podíl $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ libovolně velkým.

Nabývá-li podíl $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ neurčitého tvaru $\frac{\infty}{\infty}$ pro konečnou hodnotu $x = a$, tedy položme $x = a + \frac{1}{z}$, čímž

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{z}\right)}{\psi\left(a + \frac{1}{z}\right)},$$

kde nyní limita čítatele i jmenovatele jest ∞ pro $z = \infty$, což jest právě případ předchozí. Máme tedy pravou hodnotu

$$\lim_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{z=\infty}\frac{\varphi\left(a+\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(a+\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z=\infty}\frac{-\varphi'\left(a+\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2}}{-\psi'\left(a+\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2}}$$

$$=\lim_{z=\infty}\frac{\varphi'\left(a+\frac{1}{z}\right)}{\psi'\left(a+\frac{1}{z}\right)},$$

t. j. i v tomto případě platí

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)}.$$

Mějme n. p.

$$f(x)=\frac{a^x}{x^n},$$

kde $a>1$ a n značí celistvé kladné číslo; pro $x=\infty$ se $f(x)$ objevuje v tvaru $\frac{\infty}{\infty}$. Pro pravou hodnotu máme

$$\lim_{x=\infty}f(x)=\lim_{x=\infty}\frac{a^x\log a}{nx^{n-1}},$$

a poněvadž pro $x=\infty$ podíl na pravo nabývá opět tvaru $\frac{\infty}{\infty}$, máme

$$\lim_{x=\infty}f(x)=\lim_{x=\infty}\frac{a^x(\log a)^2}{n(n-1)x^{n-2}},$$

a podobně dále, až konečně

$$\lim_{n=\infty}f(x)=\lim_{n=\infty}\frac{a^x(\log a)^n}{n(n-1)\ldots2\cdot1}=\infty.$$

Uvažujeme-li $1:f(x)$ máme ovšem

$$\lim_{x=\infty}\frac{x^n}{a^x}=0.$$

Značí-li n libovolné kladné číslo a n_1 kladné číslo celistvé větší než n, máme $\frac{x^n}{a^x}<\frac{x^{n_1}}{a^x}$, jakmile $x>1$, a tedy platí pro každé $n>0$ a pro $a>1$:

$$\lim_{x=\infty}\frac{x^n}{a^x}=0.$$

Poučný příklad poskytuje funkce*)

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x - \sin x}{x + \sin x},$$

která pro $x = \infty$ nabývá neurčitého tvaru $\frac{\infty}{\infty}$. Podíl z derivace čítatele a z derivace jmenovatele jest tu

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2},$$

a ten při $\lim x = \infty$ nemá vůbec žádné limity, ačkoli $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ pro $x = \infty$ má zcela určitou limitu, jakož patrno, píšeme-li

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \lim \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

Výsledek ten nikterak neodporuje hořejší větě tvrdící rovnost limity $\lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ s limitou $\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ za té supposice, že derivace $\psi'(x)$ od jistého x jest stále různá od nully; kdežto v našem příkladě $\psi'(x) = 1 + \cos x$ vymizí pro hodnoty $x = (2n + 1)\pi$ rostoucí nad každé x.

103. **Neurčité tvary** $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$.

Dán-li rozdíl dvou funkcí $\Phi(x) - \Psi(x)$, které se pro určitou hodnotu $x = a$ aneb pro $x = \infty$ stávají nekonečně velkými, tu nalezneme limitu tohoto rozdílu, položíme-li funkce ty do tvaru

$$\Phi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}, \quad \Psi(x) = \frac{1}{\psi(x)};$$

pak $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ pro $\lim x = a$ neb $\lim x = \infty$ ovšem konvergují k 0 a tedy nabývá daný rozdíl

$$\Phi(x) - \Psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\psi(x)} = \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}$$

neurčitého tvaru $\frac{0}{0}$, jejž stanovíme dle čl. 101.

Dán-li součin dvou funkcí $\varphi(x) \cdot \psi(x)$, a stane-li se, že pro určitou hodnotu x první faktor vymizí, druhý ale se stává

*) *Genocchi-Peano*, l. c. pag. 169.

nekonečně velkým, tedy nalezneme limitu součinu, přepíšeme-li jej buď na tvar

$$\varphi(x)\,\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}},$$

aneb ve tvar

$$\varphi(x)\,\psi(x) = \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}};$$

pro onu hodnotu x tím vzniká tvar $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$, jejž dle čl. 101., resp. 102., vyčíslíme.

N. p. $f(x) = (1 - \cos x)\,\operatorname{cotg}^2 x$ pro $x = 0$ nabývá tvaru $0 \,.\, \infty$; pišme

$$\lim_{x=0} f(x) = \lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x=0} \frac{\sin x}{2 \operatorname{tg} x \,.\, \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim \frac{\cos^3 x}{2} = \frac{1}{2}.$$

N. p. funkce

$$f(x) = \operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}$$

pro $x = 0$ nabývá tvaru $\infty - \infty$; pišme

$$\lim_{x=0} f(x) = \lim \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x=0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$$

a máme tvar $\frac{0}{0}$, pročež

$$\lim_{x=0} f(x) = \lim_{x=0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x=0} \frac{-\sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

Různí se tedy $\operatorname{cotg} x$ od $\frac{1}{x}$ pro dosti malé hodnoty $|x|$ o libovolně málo, což také rozvoj pro $\operatorname{cotg} x$ v čl. 85. odvozený ukazuje.

Uvažujme jakožto další příklad funkci

$$f(x) = xe^{-ax}, \quad a > 0,$$

jež pro $x = \infty$ nabývá neurčitého tvaru $\infty \,.\, 0$; píšeme-li ji $f(x) = \frac{x}{e^{ax}}$, nabývá tvaru $\frac{\infty}{\infty}$ a tedy jest pravá její hodnota

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \lim \frac{1}{ae^{ax}} = 0.$$

Jakožto poslední příklad uvažujme funkci

$$f(x) = \sqrt[n]{(x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n)} - x;$$

pro $x = \infty$ nabývá tvaru $\infty - \infty$. — Položíme-li $x = \frac{1}{z}$, přejde do

$$f(x) = \frac{\sqrt[n]{(1 + a_1 z)(1 + a_2 z) \ldots (1 + a_n z)} - 1}{z}$$

a pro $z = 0$ nabývá tvaru $\frac{0}{0}$. Dle čl. 101. plyne pravá hodnota

$$\lim_{x = \infty} f(x) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

104. **Neurčité tvary** 0^0, 1^∞, ∞^0.

Dána-li funkce

$$f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)},$$

kde $\varphi(x) > 0$, tu

$$\log f(x) = \psi(x) \log \varphi(x)$$

nabývá neurčitého tvaru $0 \cdot \infty$, jestliže pro nějaké x současně platí

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0,$$

aneb

$$\varphi(x) = 1, \quad \psi(x) = \infty,$$

aneb

$$\varphi(x) = \infty, \quad \psi(x) = 0;$$

příslušné tvary pro $f(x)$ jsou resp. 0^0, 1^∞, ∞^0. Stanovíme-li pravou hodnotu $\lim \log f(x)$ dle návodu předchozího článku, jest to totéž jako hodnota $\log \lim f(x)$, a přejdeme-li od logarithmu k číslu, máme žádanou pravou hodnotu $\lim f(x)$ hořejších tří neurčitých tvarů.

Funkce n. p.

$$f(x) = (1 + ax)^{\frac{1}{x}}$$

pro $x = 0$ nabývá neurčitého tvaru 1^∞; její logarithmus

$$\log f(x) = \frac{\log (1 + ax)}{x}$$

tvaru $\frac{0}{0}$, tak že

$$\lim \log f(x) = \log \lim f(x) = \sqrt{\frac{a}{1+ax}} = a,$$
$$x = 0$$

a hledaná pravá hodnota

$$\lim f(x) = e^a.$$

105. **Vyčíslení neurčitých tvarů pomocí rozvojů a limitování.**

Toto vyčíslení provedeme v některých příkladech.

Budiž $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, tak že pro $x = 0$ vzniká tvar $\frac{0}{0}$; rozvineme-li $\sin x$ v řadu. máme

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\underline{|3}} + \frac{x^4}{\underline{|5}} \cdot \cdot,$$

a tedy $\lim_{x=0} f(x) = 1$.

Obdobně při $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$ pro $\lim x = 0$ nalezneme

$$\lim_{x=0} f(x) = \frac{x - (x - \frac{x^2}{\underline{|3}} + \cdot \cdot)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Funkce

$$f(x) = (2x - \pi) \operatorname{tg}^2 x$$

pro $x = \frac{\pi}{2}$ nabývá tvaru $0 \,.\, \infty$: položíme-li $x = \frac{\pi}{2} + h$. jde o $\lim f\left(\frac{\pi}{2} + h\right)$ pro $h = 0$. Avšak

$$f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = 2h \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \frac{2h}{\operatorname{tg}^2 h} = 2 \frac{h}{\sin h} \frac{\cos^2 h}{\sin h};$$

pro $\lim h = 0$ jest $\lim \frac{h}{\sin h} = 1$, $\lim \frac{\cos^2 h}{\sin h} = \infty$, tak že pravá hodnota

$$\lim f(x) = \infty.$$
$$x - \frac{\pi}{2}$$

Budiž dána funkce již v čl. 103. uvažovaná

$$f(x) = \sqrt[n]{(x + a_1)(x + a_2) \cdot \cdot (x + a_n)} - x,$$

která pro $x = \infty$ nabývá neurčité hodnoty tvaru $\infty - \infty$. Roz-

viňme ji pro x větší než největší z čísel $|a_1| , \ldots | a_n|$ v řadu potenční dle mocností hodnoty $\frac{1}{x}$ pokračující pomocí věty binomické:

$$f(x) = x \sqrt[n]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)} - x$$

$$= x\left(1+\frac{1}{n}\frac{a_1}{x}+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\,.\,2}\frac{a_1^2}{x^2}+\ldots\right)\ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\frac{a_n}{x}+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\,.\,2}\frac{a_n^2}{x^2}+\ldots\right)-x$$

$$= x\left(1+\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\frac{1}{x}+\frac{c_1}{x^2}+\frac{c_2}{x^3}+\ldots\right)-x$$

$$= \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\ldots$$

Pro $\lim x = \infty$ máme žádanou pravou hodnotu

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.$$

106. **Zavádění nové neodvisle proměnné.**

Mějme funkci jedné proměnné $y = f(x)$ a označme její derivace stručně $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$, atd Během počtu se mnohdy ukáže, že by byla jiná proměnná t, souvisící s původní danou relací $x = \varphi(t)$, výhodnější, a vzniká tím otázka, kterak derivace $y', y'', \ldots$ vyjádřiti derivacemi funkcí

$$x = \varphi(t), \quad y = f[\varphi(t)] = \psi(t)$$

proměnné t? Odpověď k této a k obecnějším obdobným otázkám budiž další applikací počtu differenciálného.

Pokládajíce x za neodvisle proměnnou, tedy dx za stálou, máme

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad x'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$$

což, vzhledem k stálému dx, můžeme psáti

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dy'}{dx}, \quad y''' = \frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{dy''}{dx}, \ldots$$

Dle čl. 63. jest *první* derivace funkce y dle x vždy dána podílem $\frac{dy}{dx}$, nechť jest x neodvisle proměnná, nebo není, neb jinak řečeno, první differenciál dy jest vždy $y'dx$, nechť i x jest funkcí jiné neodvisle proměnné. Máme tedy, dle posledních formulí, pokládajíce t za neodvisle proměnnou, a tedy ovšem $dx = \varphi'(t)\,dt$, $dy = \psi'(t)\,dt$ za proměnné, dt ale za stálou,

$$(2)\quad \begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx}, \\ y'' = \dfrac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} \\ y''' = \dfrac{dx^3\,d(dx\,d^2y - dy\,d^2x) - (dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,.\,3dx^2\,d^2x}{dx^6\,dx} \\ \quad = \dfrac{dx\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3d^2x\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5}, \end{cases}$$

atd. Učiníme-li speciálně $x = t$, jest dx stálé, tedy $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, . ., čímž nabýváme známých již výrazů pro derivace y

$$y' = \frac{dy}{dx},\quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$$

v případě neodvisle proměnné x.

Učiníme-li $y = t$, t. j. zvolíme-li y za neodvisle proměnnou, pokládajíce x za její funkci, jest dy stálé a tedy $d^2y = 0$, $d^3y = 0$ . ., čímž (2) přejdou do

$$y' = \frac{dy}{dx},\quad y'' = -\frac{dy\,d^2x}{dx^3},\quad y''' = \frac{-dy\,dx\,d^3x + 3\,dy\,(d^2x)^2}{dx^5}, \ldots;$$

zavedeme-li derivace funkce x vzaté dle proměnné y:

$$x' = \frac{dx}{dy},\quad x'' = \frac{d^2x}{dy^2},\quad x''' = \frac{d^3x}{dy^3}, \ldots,$$

obdržíme rovnice

$$y' = \frac{1}{x'},\quad y'' = -\frac{x''}{x'^3},\quad y''' = \frac{-x'x''' + 3x''^2}{x'^5}, \ldots,$$

vyjadřující derivace funkce y derivacemi inversní funkce x.

Jsou-li obecněji $y, z, \ldots$ funkce jedné proměnné x, a máme-li do výrazu V utvořeného z proměnných $x, y, z, \ldots$ a z derivací $y', y'', \ldots, z', z'', \ldots$ zavésti nové proměnné $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, které ovšem souvisí s původními tolika relacemi, kolik jest proměnných, tu

zvolme jednu z nových proměnných, n. p. ξ, za neodvisle proměnnou, a označme pak derivace ostatních η, $\eta'', \ldots \zeta', \zeta'', \ldots$

Nahradíme-li ve výrazu V derivace $y', y'', \ldots, z', z'', \ldots$ jich výrazy (2) z differenciálů $dx, d^2x, \ldots dy, d^2y, \ldots dz, d^2z, \ldots$ právě utvořenými a platnými pro každou neodvisle proměnnou, jest tím úkol v podstatě řešen; stačí totiž dané relace řešiti dle x, y, z, . .; differencováním získaných rovnic

$$x = f(\xi, \eta, \zeta, \ldots), \quad y = \varphi(\xi, \eta, \zeta, \ldots), \quad z = \psi(\xi, \eta, \zeta, \ldots), \ldots$$

stanoviti $dx, d^2x, \ldots, dy, d^2y, \ldots$, a vložiti tyto differenciály do V; při tomto differencování pokládáme $d\xi$ ovšem za stálou.

Budiž n. p. y funkcí x, jejíž derivace značíme y', y'' a mějme do výrazu

$$V = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

zavésti dvě nové proměnné ϱ, ω souvisící s původními pomocí dvou relací

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega, \tag{3}$$

při čemž zvolme ω za novou neodvisle proměnnou.

Vložíme-li do V za y', y'' hodnoty (2), obdržíme výraz

$$V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}, \tag{4}$$

podávající V nechť jest neodvisle proměnná kterákoli.

Differencováním rovnic (3) máme

$$dx = \cos \omega\, d\varrho - \varrho \sin \omega\, d\omega,$$
$$dy = \sin \omega\, d\varrho + \varrho \cos \omega\, d\omega,$$

a opětným differencováním, pokládáme-li $d\omega$ za stálou,

$$d^2x = \cos \omega\, d^2\varrho - 2 \sin \omega\, d\varrho\, d\omega - \varrho \cos \omega\, d\omega^2,$$
$$d^2y = \sin \omega\, d^2\varrho + 2 \cos \omega\, d\varrho\, d\omega - \varrho \sin \omega\, d\omega^2.$$

Nápotom nalezneme

$$dx^2 + dy^2 = d\varrho^2 + \varrho^2\, d\omega^2,$$
$$dx\, d^2y - dy\, d^2x = -\varrho\, d^2\varrho\, d\omega + 2d\varrho^2\, d\omega + \varrho^2\, d\omega^3,$$

což vloženo do (4) dává

$$V = \frac{(d\varrho^2 + \varrho^2\, d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{-\varrho d^2\varrho\, d\omega + 2d\varrho^2\, d\omega + \varrho^2\, d\omega^3},$$

aneb, dělíme-li čítatel i jmenovatel $d\omega^3$, abychom V vyjádřili opět derivacemi,

$$V = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''},$$

kde $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\omega}$, $\varrho'' = \frac{d^2\varrho}{d\omega^2}$.

107. Zavádění nových neodvisle proměnných.

Do funkce u proměnných $x_1, x_2, \ldots x_m$ zaveďme nové proměnné $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$, čímž se u objeví jakožto funkce těchto; nastává úkol, parciálné derivace funkce u podle prvních proměnných vyjádřiti parciálnými derivacemi funkce u podle nových proměnných.

Zavedení nových proměnných se děje tím, že pokládáme původní jakožto dané funkce nových a naopak (v. předchozí článek).

Pokládajíce tedy u za funkci $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ a tyto hodnoty za funkce $x_1, x_2, \ldots x_m$, jest u složená funkce a její totálný differenciál

$$du = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial \xi_m} d\xi_m, \tag{5}$$

a dále

$$\left.\begin{aligned} d\xi_1 &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_m} dx_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d\xi_m &= \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m} dx_m. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Hodnoty ξ známe jakožto funkce hodnot x, tedy známe také derivace $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ jako funkce x, do nichž ale nutno zavésti proměnné ξ.

Vložením differenciálů (6) do (5) obdržíme

$$du = dx_1 \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_1} + dx_2 \sum_{1}^{m} \frac{\partial u}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_2} + \ldots + dx_m \sum_{1}^{m} \frac{\partial u}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_m};$$

differenciály $dx_1, \ldots dx_m$ mají ovšem za koefficienty $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_m}$, čímž tyto derivace vyjádřeny derivacemi u dle $\xi_1, \ldots \xi_m$ vzatými:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial \xi_m}\dfrac{\partial \xi_m}{\partial x_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_m} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_m} + \dfrac{\partial u}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_m} + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial \xi_m}\dfrac{\partial \xi_m}{\partial x_m}. \end{cases}$$

Podobně vyjádříme druhé derivace. Máme totiž totálný differenciál

$$d\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \ldots + \frac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\partial \xi_m} d\xi_m;$$

vložíme-li na pravo za $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ právě nalezený výraz (7) a za $d\xi_1, \ldots$ $d\xi_m$ výrazy (2), obdržíme $d\frac{\partial u}{\partial x_1}$ vyjádřený druhými derivacemi funkce u dle proměnných ξ ve tvaru $\sum_{\nu=1}^{m} A_\nu dx_\nu$. Pokládáme-li $\frac{\partial x}{\partial x_1}$ za funkci proměnných x, máme přímo

$$d\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_m} dx_m,$$

čímž nalezeny derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = A_1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = A_2, \ldots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_m} = A_m.$$

Stanovením totálného differenciálu $d\frac{\partial u}{\partial x_2}$ bychom obdobně nabyli derivací $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_m}$, a pod. všech dalších.

Jakožto příklad uvažujme funkci u tří proměnných x, y, z, a zaveďme do ní tři nové proměnné ϱ, ϑ, ω formulemi

$$(8)\qquad x = \varrho \sin\vartheta \cos\omega, \quad y = \varrho \sin\vartheta \sin\omega, \quad z = \varrho \cos\vartheta,$$

jež řešeny dle nových proměnných podávají

$$(9)\qquad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{y}{x}.$$

Pokládáme-li x, y, z za pravoúhlé souřadnice bodu v prostoru, mají ϱ, ϑ, ω význam jeho polárných souřadnic.

Jde o vyjádření prvních a druhých derivací u dle x, y, z pomocí derivací u vzatých dle ϱ, ϑ, ω.

Z rovnic (9) plyne differencováním

$$d\varrho = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{z(x\,dx + y\,dy) - (x^2 + y^2)\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{d\omega}{\cos^2\omega} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2},$$

aneb pomocí rovnic (8):

$$(10)\quad \begin{cases} d\varrho = \sin\vartheta\cos\omega\,dx + \sin\vartheta\sin\omega\,dy + \cos\vartheta\,dz, \\ d\vartheta = \frac{1}{\varrho}\cos\vartheta\cos\omega\,dx + \frac{1}{\varrho}\cos\vartheta\sin\omega\,dy - \frac{1}{\varrho}\sin\vartheta\,dz, \\ d\omega = -\frac{1}{\varrho}\frac{\sin\omega}{\sin\vartheta}dx + \frac{1}{\varrho}\frac{\cos\omega}{\sin\vartheta}dy. \end{cases}$$

Vložíme-li tyto hodnoty do rovnice

$$du = \frac{\partial u}{\partial\varrho}d\varrho + \frac{\partial u}{\partial\vartheta}d\vartheta + \frac{\partial u}{\partial\omega}d\omega,$$

označené v obecné úvaze číslem (5), obdržíme du vyjádřeno dx, dy, dz a z výrazu toho soudíme, že

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\varrho}\sin\vartheta\cos\omega + \frac{\partial u}{\partial\vartheta}\frac{\cos\vartheta\cos\omega}{\varrho} - \frac{\partial u}{\partial\omega}\frac{\sin\omega}{\varrho\sin\vartheta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\varrho}\sin\vartheta\sin\omega + \frac{\partial u}{\partial\vartheta}\frac{\cos\vartheta\sin\omega}{\varrho} + \frac{\partial u}{\partial\omega}\frac{\cos\omega}{\varrho\sin\vartheta}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial\varrho}\cos\vartheta - \frac{\partial u}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta}{\varrho}, \end{cases}$$

čímž vyjádřeny první derivace u dle původních proměnných derivacemi dle nových proměnných.

Dle obecného návodu vyjádříme obdobně druhé derivace, zjednáme-li si totálné differenciály těchto prvních derivací, aneb, což jest v podstatě totéž, parciálné derivace jejich dle ϱ, ϑ, ω. Nalezneme z (11):

$$(12)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial\varrho^2}\sin\vartheta\cos\omega + \frac{\partial^2 u}{\partial\varrho\,\partial\vartheta}\frac{\cos\vartheta\cos\omega}{\varrho} - \frac{\partial^2 u}{\partial\varrho\,\partial\omega}\frac{\sin\omega}{\varrho\sin\vartheta} \\ \qquad - \frac{\partial u}{\partial\vartheta}\frac{\cos\vartheta\cos\omega}{\varrho^2} + \frac{\partial u}{\partial\omega}\frac{\sin\omega}{\varrho^2\sin\vartheta}, \\ \frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial\varrho\,\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\omega + \frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2}\frac{\cos\vartheta\cos\omega}{\varrho} - \frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta\,\partial\omega}\frac{\sin\omega}{\varrho\sin\vartheta} \\ \qquad + \frac{\partial u}{\partial\varrho}\cos\vartheta\cos\omega - \frac{\partial u}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\omega}{\varrho} + \frac{\partial u}{\partial\omega}\frac{\cos\partial\sin\omega}{\varrho\sin^2\vartheta}, \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\partial \omega} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varrho\, \partial \omega} \sin\vartheta \cos\omega - \dfrac{\partial^2 u}{\partial \vartheta\, \partial \omega} \dfrac{\cos\vartheta \cos\omega}{\varrho} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} \dfrac{\sin\omega}{\varrho \sin\vartheta} \\ \qquad - \dfrac{\partial u}{\partial \varrho} \sin\vartheta \sin\omega - \dfrac{\partial u}{\partial \vartheta} \dfrac{\cos\vartheta \sin\omega}{\varrho} - \dfrac{\partial u}{\partial \omega} \dfrac{\cos\omega}{\varrho \sin\vartheta}. \end{cases}$$

Násobíme-li tyto výrazy (12) resp. hodnotami $d\varrho$, $d\vartheta$, $d\omega$ danými rovnicemi (10) a sečteme-li výsledky, obdržíme totálný differenciál hodnoty $\frac{\partial u}{\partial x}$, a v něm jsou koefficienty při dx, dy, dz hledané druhé derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}$. Tím nalézáme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} \sin^2\vartheta \cos^2\omega + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho\, \partial \vartheta} \frac{\sin\vartheta \cos\vartheta \cos^2\omega}{\varrho} \\ & - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho\, \partial \omega} \frac{\sin\omega \cos\omega}{\varrho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \frac{\cos^2\vartheta \cos^2\omega}{\varrho^2} \\ & - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta\, \partial \omega} \frac{\cos\vartheta \sin\omega \cos\omega}{\varrho^2 \sin\vartheta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} \frac{\sin^2\omega}{\varrho^2 \sin^2\vartheta} \\ & + \frac{\partial u}{\partial \varrho} \frac{\cos^2\vartheta \cos^2\omega + \sin^2\omega}{\varrho} + \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \frac{(\sin^2\omega - 2\sin^2\vartheta \cos^2\omega)\cos\vartheta}{\varrho^2 \sin\vartheta} \\ & + 2 \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{\sin\omega \cos\omega}{\varrho^2 \sin^2\vartheta}, \end{aligned}$$

a obdobně ostatní druhé derivace*).

108. **Záměna všech proměnných za jiné.**

Předchozí methoda vede k cíli i při záměně všech proměnných, neodvislých i odvislých, za nové. Budiž n. p. z funkcí m neodvisle proměnných $x_1, x_2, \ldots x_m$, a zaveďme do počtu na místo těchto $m + 1$ proměnných nové proměnné $\zeta, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$, z nichž ζ pokládáme za funkci ostatních; jde o vyjádření parciálných derivací z podle $x_1, x_2, \ldots x_m$ vzatých parciálnými derivacemi ζ dle $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ vzatých.

Souvislost původních proměnných s novými jest ovšem dána $m + 1$ relacemi mezi oběma, tak sice, že můžeme $\zeta, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ pokládati za dané funkce proměnných $z, x_1, x_2, \ldots x_m$, aneb naopak. Máme tedy totálné differenciály

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz + \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \zeta}{\partial x_m} dx_m,$$

*) Sr. *J. A. Serret*, Calcul différentiel, 4e éd., pag. 122

$$d\xi_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_m}\,dx_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d\xi_m = \frac{\partial \xi_m}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m}\,dx_m,$$

kde na pravé straně stojící derivace jsou ovšem známé funkce proměnných $z, x_1, \ldots x_m$. Avšak z jest funkcí $x_1, \ldots x_m$ a tedy

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_m}\,dx_m,$$

což vloženo do předchozích rovnic, podává

$$(13)\quad \begin{cases} d\zeta = \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial x_1}\right)dx_1 + \ldots + \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_m} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial x_m}\right)dx_m, \\ d\xi_1 = \left(\dfrac{\partial \xi_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)dx_1 + \ldots + \left(\dfrac{\partial \xi_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_m} + \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_m}\right)dx_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d\xi_m = \left(\dfrac{\partial \xi_m}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \xi_m}{\partial x_1}\right)dx_1 + \ldots + \left(\dfrac{\partial \xi_m}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_m} + \dfrac{\partial \xi_m}{\partial x_m}\right)dx_m. \end{cases}$$

Vložením těchto hodnot (13) do rovnice

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1}\,d\xi_1 + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2}\,d\xi_2 + \ldots + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m}\,d\xi_m,$$

obdržíme v levo i v pravo výraz lineárný a homogenní v differenciálech $dx_1, dx_2, \ldots dx_m$, a poněvadž tyto jsou zcela libovolné, musí jich koefficienty v levo a v pravo býti stejné, čímž obdržíme m rovnic

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial x_1} = \left(\dfrac{\partial \xi_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)\dfrac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} + \ldots \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial \xi_m}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \xi_m}{\partial x_1}\right)\dfrac{\partial \zeta}{\partial \xi_m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_m} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial x_m} = \left(\dfrac{\partial \xi_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_m} + \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_m}\right)\dfrac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} + \ldots \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial \xi_m}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_m} + \dfrac{\partial \xi_m}{\partial x_m}\right)\dfrac{\partial \zeta}{\partial \xi_m}, \end{cases}$$

z nichž plynou $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_m}$ vyjádřeny pomocí $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m}$; ovšem nutno do ostatních derivací zavésti proměnné $\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_m$.

Obdobně vypočteme druhé derivace differencováním rovnic (14). Differencujme první rovnice (14) a nahraďme $d\frac{\partial z}{\partial x_1}$ hodnotou

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \cdot\cdot + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_m} dx_m;$$

obdobně nahradíme $d\zeta$, $d\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1}$, $\cdot\cdot$, $d\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m}$ jich hodnotami

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} + \cdot\cdot + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m} d\xi_m,$$

$$d\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_1^2} d\xi_1 + \cdot\cdot + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_1 \partial \xi_m} \partial \xi_m,$$

$$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$d\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_1 \partial \xi_m} d\xi_1 + \cdot\cdot + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_m^2} d\xi_m,$$

a za $d\xi_1$, . . $d\xi_m$ položme konečně jich hodnoty (13). Vznikající rovnice platná pro každé hodnoty dx_1, . . dx_m se rozloží na m rovnic, z nichž plynou druhé derivace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \cdot\cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_m}$$

v žádaném tvaru, a pod. i ostatní.

Methody vyložené lze patrně užiti i při libovolném počtu funkcí.

109. **Homogenní či stejnorodé funkce.**

Funkce

$$u = f(x, y, z, \cdot\cdot)$$

sluje homogenní funkcí n-ho stupně proměnných x, y, z, . ., platí-li pro každé t

$$f(tx, ty, tz, \cdot\cdot) = t^n f(x, y, z, \cdot\cdot).$$

Tak jsou n. p.

$$ax^2 + bxy + cy^2, \quad \frac{x - y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

homogenní funkce resp. stupně 2, — 1, 0.

Aby racionálná celistvá funkce

$$u = \Sigma A_{\alpha\beta\gamma} \cdot\cdot x^\alpha y^\beta z^\gamma \cdot\cdot$$

byla homogenní n-ho stupně, musí dle definice

$$\Sigma A_{\alpha\beta\gamma}\,..t^{\alpha+\beta+\gamma}\cdot\cdot x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}\,..=t^{n}\,\Sigma A_{\alpha\beta\gamma}\,..x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}\,..$$

a tedy

$$\alpha+\beta+\gamma\,..=n;$$

n jest tedy celistvé kladné číslo, a dimense (rozměr) každého členu musí býti n. N. p. obecná celistvá homogenní funkce n-ho stupně dvou proměnných jest

$$A_{n,0}x^{n}+A_{n-1,1}x^{n-1}y+A_{n-2,2}x^{n-2}y^{2}+\,..+A_{0,n}y^{n}.$$

Jsou-li u, v dvě homogenní funkce týchž proměnných resp. stupňů m, n

$$u=f(x,y,z,\,..),\quad v=\varphi(x,y,z,\,..),$$

jsou jich součin uv a jich podíl $\frac{u}{v}$ též homogenní funkce a s. resp. stupňů $m+n$, $m-n$; máme totiž

$$f(tx,ty,tz,\,..)\,.\,\varphi(tx,ty,tz,\,..)=t^{m+n}f(x,y,z,\,..)\,\varphi(x,y,z\,..),$$

$$\frac{f(tx,ty,tz,\,..)}{\varphi(tx,ty,tz,\,..)}=t^{m-n}\frac{f(x,y,z,\,..)}{\varphi(x,y,z,\,..)}.$$

Libovolná funkce $\varphi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x},\cdot\cdot\right)$ podílů $\frac{y}{x},\frac{z}{x},\cdot\cdot$ jest patrně homogenní funkcí 0-ho stupně proměnných x, y, z, . ., a naopak jest každá homogenní funkce 0-ho stupně $f(x,y,z,\,..)$ funkcí oněch podílů; dle supposice máme totiž

$$f(tx,ty,tz,\,..)=t^{0}\,f(x,y,z,\,..)=f(x,y,z,\,..)$$

a zavedeme-li tedy do funkce f na místo proměnných x, y, z, . . nové proměnné x, η, ζ, . ., kde $\eta=\frac{y}{x}$, $\zeta=\frac{z}{x}$, . ., čímž nechť

$$f(x,y,z,\,..)=f(x,\eta x,\xi x,\,..)=\varphi(x,\eta,\zeta,\,..),$$

máme dle poslední rovnice

$$\varphi(x,\eta,\zeta,\,..)=\varphi(tx,\eta,\zeta,\,..),$$

což znamená, že φ jest totéž při jakémkoli x, čili nezávislé na x. Tím nalézáme

$$f(x,y,z,\,..)=\psi(\eta,\zeta,\,..)=\psi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x},\cdot\cdot\right),$$

jak bylo dokázati.

Nyní snadno nalezneme obecný tvar homogenní funkce $f(x, y, z, \ldots)$ stupně n-ho. Jest totiž x^n homogenní funkcí stupně n-ho, a tedy podíl $\frac{f}{x^n}$ homogenní funkcí stupně 0-ho:

$$\frac{f(x, y, z, \ldots)}{x^n} = \psi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right),$$

kde ψ jest libovolná funkce svých argumentů; odtud obecný výraz homogenní funkce n-ho stupně:

$$f(x, y, z, \ldots) = x^n \psi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right).$$

110. **Eulerova věta o homogenních funkcích.**

Větě té předešleme tuto:

Parciálné derivace homogenní funkce n-ho stupně jsou též homogenní funkce a to stupně $n-1$-ho.

Derivujeme-li totiž supponovanou totožnost

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^n f(x, y, z, \ldots) \tag{15}$$

dle x, obdržíme

$$f'_x(tx, ty, tz, \ldots)\frac{\partial(tx)}{\partial x} = t^n f'_x(x, y, z, \ldots);$$

avšak $\frac{\partial(tx)}{\partial x} = t$, a tedy

$$f'_x(tx, ty, tz, \ldots) = t^{n-1} f'_x(x, y, z, \ldots),$$

což dokazuje, že f'_x jest homogenní funkce stupně $n-1$.

Druhé derivace funkce f budou homogenními funkcemi $n-2$-ho stupně, třetí $n-3$-ho, atd. obecně k-té budou homogenní a stupně $n-k$-ho.

Věta Eulerova jest tato:

Součet součinů z parciálných derivací homogenní funkce a z příslušných proměnných se rovná součinu z funkce a z jejího stupně, a naopak.

Derivováním supponované totožnosti (15) dle t obdržíme

$$f'_x(tx, ty, tz, \ldots)\,x + f'_y(tx, ty, tz, \ldots)\,y + f'_z(tx, ty, tz, \ldots)\,z + \ldots = nt^{n-1} f(x, y, z, \ldots).$$

Položíme-li $t = 1$, máme

$$(16) \quad f'_x(x, y, z, \ldots) x + f'_y(x, y, z, \ldots) y + f'_z(x, y, z, \ldots) z + \ldots = n f(x, y, z, \ldots),$$

anebo stručněji

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z + \ldots = nf,$$

čímž přímý výrok dokázán.

Ale i opak platí, t. j. hoví-li funkce f této parciálné differenciálné rovnici, jest homogenní a to stupně n. Položíme-li totiž do (16) $tx, ty, tz, \ldots$ na místo $x, y, z, \ldots$, obdržíme $f'_x(tx, ty, tz, \ldots) tx + f'_y(tx, ty, tz \ldots) ty + \ldots = n f(tx, ty, tz, \ldots)$.

Utvořme funkci

$$(17) \quad F(t) = \frac{f(tx, ty, \ldots)}{t^n}$$

a její derivaci dle t:

$$F'(t) = \frac{t[f'_x(tx, ty, \ldots) x + f'_y(tx, ty, \ldots) y + \ldots] - n f(tx, ty, \ldots)}{t^{n+1}}.$$

Poslední rovnice ukazuje, že tato derivace jest 0, a tedy jest $F(t)$ stálé, pišme třeba $F(t) = F(1) = f(x, y, z \ldots)$.

Nyní zní (17)

$$f(x, y, \ldots) = \frac{f(tx, ty, \ldots)}{t^n},$$

t. j.

$$f(tx, ty, \ldots) = t^n f(x, y, \ldots),$$

čímž tvrzení dokázáno.

Derivujeme-li totožnost (15) dvakrát, třikrát, .. dle t a učiníme-li pak $t = 1$, obdržíme, značíce homogenní funkci n-ho stupně $f(x, y, z, \ldots)$ literou u, řadu rovnic parciálných

$$18 \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} x^2 + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} y^2 + \ldots + 2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} xy + \ldots = n(n-1) u, \\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} x^3 + \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} y^3 + \ldots + 3 \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} x^2 y + \ldots = n(n-1)(n-2) u, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

jimž hoví u. Všecky tyto rovnice ostatně plynou applikací

Eulerovy věty na parciálné derivace funkce u, dle níž máme rovnice

$$(n-1)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}x + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}y + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}z + \ldots,$$

$$(n-1)\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}y + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}z + \ldots,$$

. . . . . .

jichž násobením $x, y, \ldots$ a sečtením vychází první rovnice (18), atd.

111. Funkcionálné determinanty.

Funkcionálný č. Jacobi-ho*) determinant n funkcí $y_1, y_2, \ldots y_n$ tolikéž proměnných $x_1, x_2, \ldots x_n$ nazván (čl. 95.) determinant utvořený z n^2 parciálných derivací prvního řádu těchto funkcí

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}, \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix};$$

týž se stručněji značívá symbolem

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

Důležitost tohoto determinantu vysvitla již v čl. 95. a vychází také z následujících vět.

Jsou-li $y_1, \ldots y_n$ funkce tolikéž proměnných $u_1, \ldots u_n$, a tyto opět funkce tolikéž proměnných $x_1, \ldots x_n$, tu funkcionálný determinant funkcí y dle proměnných x se rovná součinu z funkcionálného determinantu hodnot y dle hodnot u a z funkcionálného determinantu těchto dle proměnných x.

Vzhledem k

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_s} = \frac{\partial y_r}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_s} + \frac{\partial y_r}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_s} + \ldots + \frac{\partial y_r}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_s}$$

*) *Jacobi*, De determinantibus functionalibus, Gesammelte Werke, t. III.

máme skutečně dle pravidla o násobení determinantů

$$\frac{D(y_1 \ldots y_n)}{D(x_1 \ldots x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial u_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Jsou-li $y_1, \ldots y_n$ funkce tolikéž proměnných $x_1, \ldots x_n$ a jest-li jich funkcionálný determinant různý od nully, možno naopak hodnoty x pokládati za funkce proměnných y a jich funkcionálný determinant jest reciproký k onomu funkcionálnému determinantu.

Že při nemizícím funkcionálném determinantu $\frac{D(f_1, \ldots f_n)}{D(x_1, \ldots x_n)}$ možno $x_1, \ldots x_n$ hovící rovnicím

$$y_\nu - f_\nu(x_1, \ldots x_n) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

pokládati za funkce hodnot $y_1, \ldots y_n$, bylo již v čl. 95. vytknuto. Pokládajíce tedy $y_1, \ldots y_n$ za funkce proměnných $x_1, \ldots x_n$, a tyto opět za funkce proměnných $y_1, \ldots y_n$, máme dle předchozí věty

$$\frac{D(y_1, \ldots y_n)}{D(y_1, \ldots y_n)} = \frac{D(y_1, \ldots y_n)}{D(x_1, \ldots x_n)} \cdot \frac{D(x_1, \ldots x_n)}{D(y_1, \ldots y_n)},$$

t. j

$$\frac{D(y_1, \ldots y_n)}{D(x_1, \ldots x_n)} \cdot \frac{D(x_1, \ldots x_n)}{D(y_1, \ldots y_n)} = 1,$$

jak bylo dokázati.

Jest-li dáno n funkcí $y_1, \ldots y_n$ tolikéž proměnných $x_1, \ldots x_n$ implicitně rovnicemi

$$f_1(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n) = 0, \ \ldots f_n(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n) = 0,$$

platí

$$\frac{D(y_1, \ldots y_n)}{D(x_1, \ldots x_n)} = (-1)^n \frac{\frac{D(f_1, \ldots f_n)}{D(x_1, \ldots x_n)}}{\frac{D(f_1, \ldots f_n)}{D(y_1, \ldots y_n)}};$$

jako speciálný případ této formule možno považovati formuli pro derivaci implicitní funkce jedné proměnné v čl. 93., což opět poukazuje k analogii funkcionálných determinantů s derivacemi. Abychom formuli tu dokázali, derivujme dané rovnice dle každé proměnné x majíce na zřeteli, že y jsou funkce proměnných x; tím obdržíme n^2 rovnic

$$-\frac{\partial f_r}{\partial x_s} = \frac{\partial f_r}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_s} + \frac{\partial f_r}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_s} + \ldots + \frac{\partial f_r}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_s}.$$

Determinant z levých stran utvořený jest tedy součinem z determinantu o elementech $\frac{\partial f}{\partial y}$ a z determinantu o elementech $\frac{\partial y}{\partial x}$, t. j.

$$(-1)^n \frac{D(f_1, \ldots f_n)}{D(x_1, \ldots x_n)} = \frac{D(f_1, \ldots f_n)}{D(y_1, \ldots y_n)} \frac{D(y_1, \ldots y_n)}{D(x_1, \ldots x_n)},$$

z čehož plyne formule, o kterou šlo.

Jest-li determinant $\frac{D(y_1, \ldots y_n)}{D(x_1, \ldots x_n)}$ *totožně*) roven nulle; nejsou-li ale pro nějakou soustavu hodnot* $x_1, \ldots x_n$ *všecky podřízené jeho determinanty nullami, tu jest v okolí oné soustavy jedna z hodnot* $y_1, \ldots y_n$ *funkcí ostatních;*

vymizí-li ale také všecky podřízené determinanty, jest-li ale alespoň jeden podřízený determinant $n-2$ *-ho stupně pro nějakou soustavu* x *různý od nuly, jsou v jejím okolí dvě z hodnot* y *funkcemi ostatních;*

a obecně: vymizí-li totožně s funkcionálným determinantem všecky jeho podřízené determinanty až včetně stupně $n-r+1$, *jestli ale alespoň jeden minor stupně* $n-r$ *pro nějakou soustavu* x *různý od nully, jest v jejím okolí* r *z hodnot* y *funkcemi ostatních.*

Proveďme důkaz pro případ $n = 3$, připomínajíce, že jej pro libovolné n možno obdobně provésti.

Mějme tedy

(19) $y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3)$, $y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3)$, $y_3 = \varphi_3(x_1, x_2, x_3)$,

a předpokládejme, že determinant $\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}$ se totožně rovná 0; dále že n. p. minor náležející k elementu $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$, t. j. determinant $\frac{D(y_2, y_3)}{D(x_2, x_3)}$, jest různý od nully.

Vzhledem k poslední supposici možno x_2 a x_3 pokládati za implicitní funkce proměnných x_1, y_2, y_3, dané druhou a třetí rovnicí (19); vložením jich do rovnice první

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3)$$

přejde y_1 do funkce týchž tří proměnných x_1, y_2, y_3.

---

*) t. j. pro všecky hodnoty proměnných $x_1, \ldots x_n$.

Možno tedy y_1, y_2, y_3 pokládati za funkce x_1, x_2, x_3 a tyto opět za funkce proměnných x_1, y_2, y_3; a applikací předeslané věty máme

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, y_2, y_3)} = \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(x_1, y_1, y_2)}. \tag{20}$$

Avšak

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, y_2, y_3)} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1},$$

a

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(x_1, y_2, y_3)} = \frac{D(x_2, x_3)}{D(y_2, y_3)} = -\frac{1}{\frac{D(y_2, y_3)}{D(x_2, x_3)}}$$

jest dle supposice konečná hodnota. Rovnice (20), v níž levá strana dle supposice jest 0, tedy podává

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 0;$$

vložíme-li tedy do $y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ za x_2, x_3 jich výrazy jakožto funkce proměnných x_1, y_2, y_3, tu se stane y_1 neodvislé od x_1, t. j. pouhou funkcí hodnot y_2, y_3, jak bylo dokázati.

Předpokládejme, za druhé, že determinant $\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}$ i všecky jeho podřízené determinanty se rovnají totožně 0, že ale alespoň jeden minor prvního stupně, t. j. jeden element, n. p. poslední $\frac{\partial y_3}{\partial x_3} \gtrless 0$; supposici takovou možno vždy učiniti, neb jinak by všecky tři funkce φ_1, φ_2, φ_3 se redukovaly na stálé.

Vzhledem k $\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \gtrless 0$ možno (čl. 94.) x_3 pokládati za implicitní funkci proměnných x_1, x_2, y_3 danou třetí rovnicí (19), jejíž derivace dle x_1 a x_2 plynou z rovnic derivováním této získaných

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0.$$

Vložením této hodnoty x_3 do první rovnice (19) obdržíme y_1 jakožto funkci týchž proměnných x_1, x_2, y_3 a její parciálné derivace dle x_1 a x_2 jsou pak

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2},$$

aneb, vložíme-li za $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial x_3}{\partial x_2}$ hodnoty z předchozích rovnic plynoucí,

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3}} = \frac{\frac{D(y_1, y_3)}{D(x_1, x_3)}}{\frac{\partial y_3}{\partial x_3}},$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}}{\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3}} = \frac{\frac{D(y_1, y_3)}{D(x_2, x_3)}}{\frac{\partial y_3}{\partial x_3}}.$$

Čítatele na pravé straně jsou dle supposice 0. kdežto jest jmenovatel $\frac{\partial y_3}{\partial x_3} \gtrless 0$, a tedy máme

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0,$$

t. j. po zavedení x_3 jakožto funkce x_1, x_2, y_3 jest y_1 nezávislé na x_1 a x_2, tedy pouhou funkcí proměnné y_3. Obdobně by plynulo, že jest i y_2 pouhou funkcí proměnné y_3, t. j.

$$y_1 = \psi(y_3), \quad y_2 = \chi(y_3),$$

jak bylo dokázati.

Kapitola VIII.

Maxima a minima.

112. Maxima a minima funkce jedné proměnné.

Funkce jedné proměnné $f(x)$ jest pro hodnotu $x = x_0$ *maximem*, jest-li $f(x_0)$ větší, a *minimem*, jest-li $f(x_0)$ menší než $f(x)$ pro všecka x jistého okolí místa x_0, t. j. existuje-li kladné číslo ε takové, že při $0 < |h| < \varepsilon$ platí

$$f(x_0) > f(x_0 + h) \text{ resp. } f(x_0) < f(x_0 + h).$$

V novější době označena maxima i minima společným názvem *extremních hodnot.*

Tímto způsobem definovaná maxima neb minima slují také *absolutní*; o jich vzniku rozhodují sousední hodnoty funkční, z čehož patrno, že může míti funkce několik extremních hodnot, a že může míti maxima, která jsou menší než minima. Funkce spojitá definovaná v intervallu $(a \ldots b)$ má horní a dolní mez L, l svých hodnot a dosáhne ji (čl. 42.); stane-li se to pro hodnotu x_0 různou od krajních hodnot a, b, jest $f(x_0)$ maximem, resp. minimem, a zároveň ovšem největší, resp. nejmenší funkční hodnotou v intervallu.

Jest-li intervall, v němž spojitá funkce $f(x)$ jest definována, nekonečně velký, tedy $(a \ldots \infty)$, $(-\infty \ldots b)$ aneb $(-\infty \ldots +\infty)$, tu věta o existenci horní a dolní meze L, l nemá místa, a funkce může tyto meze míti, ale nemusí, a taktéž může, ale nemusí míti maxim neb minim.

Má-li $f(x)$ pro $x = x_0$ kladnou derivaci $f'(x_0)$, tu roste $f(x)$ na tomto místě (čl. 68.) a jsou tedy sousední hodnoty $f(x)$ větší, resp. menší než $f(x_0)$ souhlasně s $x \gtrless x_0$; v případě tom není

tedy $f(x_0)$ ani maximem ani minimem. A poněvadž týž výrok platí, když $f'(x_0)$ jest záporná hodnota, soudíme:

Má-li funkce $f(x)$ pro $x = x_0$ konečnou derivaci různou od nully, tedy pro $x = x_0$ není funkce ani maximem ani minimem.

Mohou tedy vzniknouti maxima neb minima funkce $f(x)$, která obecně má derivaci, jen pro ony hodnoty x, pro něž buď derivace $f'(x)$ vymizí, aneb neexistuje. aneb jest nekonečně velká.

Uvažujme nejprve hodnotu x_0, činící $f'(x_0) = 0$, a připomeňme, že (čl 68.)

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_1),$$

kde x_1 značí hodnotu mezi x_0 a x položenou.

Stává-li se $f'(x)$ na místě $x = x_0$ nullou takovým způsobem, že při tom přechází s rostoucím x z hodnot kladných do záporných, resp. naopak, tedy jest $f(x_0)$ maximem resp. minimem; v prvním případě máme totiž při $x < x_0$, také $x_1 - x_0 < 0$, $f'(x_1) > 0$, a při $x > x_0$, také $x_1 - x_0 > 0$ $f'(x_1) < 0$. a tedy vždy $(x - x_0)$ $f'(x_1) > 0$, t. j. $f(x) - f(x_0) < 0$, v druhém obdobně $f(x)$ $- f(x_0) > 0$. *Stává-li se ale $f'(x)$ na místě $x = x_0$ nullou takovým způsobem, že při tom přechází z hodnot kladných opět do hodnot kladných, aneb ze záporných opět do záporných, tu není $f(x_0)$ ani maximem ani minimem*; má totiž pak $f'(x_1)$ stálé znamení, nechť jest $x \gtrless x_0$, a tedy má $(x - x_0) f'(x_1)$ různá znamení souhlasně s $x \gtrless x_0$.

Znamení derivace $f'(x)$ v okolí místa x_0 možno snadno posouditi pomocí hodnoty druhé derivace $f''(x)$ pro $x = x_0$. Jest-li totiž $f''(x_0) < 0$ tedy funkci $f'(x)$ ubývá, a poněvadž $f'(x_0) = 0$, tedy přechází $f'(x)$ z hodnot kladných do záporných s rostoucím x; při $f''(x_0) > 0$ ovšem přechází $f'(x)$ z hodnot záporných do kladných, tak že platí výrok:

Činí-li hodnota x_0, která annulluje $f'(x)$, druhou derivaci $f''(x)$ kladnou, resp. zápornou, jest $f(x)$ minimem, resp. maximem.

Jestliže hodnota x_0 annullující $f'(x)$ také $f''(x)$ annulluje, tedy pravidlo to nerozhoduje. Supponujme hned obecně, že

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \gtrless 0;$$

pak v Taylorově formuli

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \frac{x - x_0}{1} + \cdots + f^{(n-2)}(x_0) \frac{(x - x_0)^{n-2}}{\lfloor n - 2} + f^{(n-1)}(x_1) \frac{(x - x_0)^{n-1}}{\lfloor n - 1},$$

kde x_1 značí hodnotu mezi x a x_0, vymizí prvních n—1 členů a máme

$$f(x) - f(x_0) = f^{(n-1)}(x_1) \frac{(x - x_0)^{n-1}}{\underline{|n-1}}.$$

Při $f^{(n)}(x_0) > 0$ roste $f^{(n-1)}(x)$ v místě x_0, a poněvadž $f^{(n-1)}(x_0) = 0$, tedy přechází z hodnot záporných do kladných; obdobně při $f^{(n)}(x_0) < 0$ přechází $f^{(n-1)}(x)$ z hodnot kladných do záporných. Jest-li n liché tedy $n - 1$ sudé, má $(x - x_0)^{n-1}$ vždy kladné znamení, a tedy má $f(x) - f(x_0)$ souhlasné znamení s $f^{(n-1)}(x_1)$, která hodnota má při $x \gtrless x_0$ různá znamení; v případě tom nenastane pro $x = x_0$ ani maximum ani minimum. Jest-li ale n sudé, tedy $n - 1$ liché, má $(x - x_0)^{n-1}$ znamení $\pm$ souhlasně s $x \gtrless x_0$, a tedy má při $f^{(n)}(x_0) > 0$ součin na pravé straně stále znamení $+$, a při $f^{(n)}(x_0) < 0$ stále znamení $-$, t. j. $f(x_0)$ jest minimem, resp. maximem.

Téhož výsledku dojdeme rychleji, předpokládáme-li, že i n-tá derivace $f^{(n)}(x)$ jest v místě x_0 spojitá. Vezmeme-li nyní formuli Taylorovu až do n-té derivace, máme

$$f(x) - f(x_0) = f^{(n)}(x_1) \frac{(x - x_0)^n}{\underline{|n}},$$

kde x_1 jest opět mezi x_0 a x. Poněvadž $f^{(n)}(x)$ jest pro $x = x_0$ spojitá, má $f^{(n)}(x)$ totéž znamení jako $f^{(n)}(x_0)$ pro dosti malé $|x - x_0|$ a totéž znamení má tedy i $f^{(n)}(x_1)$. Při lichém n mění ale $(x - x_0)^n$ své znamení, a tedy není $f(x_0)$ ani maximem ani minimem; při sudém n jest $(x - x_0)^n$ stále kladné a tedy má $f(x) - f(x_0)$ souhlasné znamení s $f^{(n)}(x_1)$ čili i s $f^{(n)}(x_0)$, a jest tudíž minimem neb maximem souhlasně s $f^{(n)}(x_0) \gtrless 0$. Tím nalézáme větu:

Jestliže pro $x = x_0$ vymizí první a některé následující derivace funkce $f(x)$, tu jest $f(x_0)$ hodnotou extremní aneb ji není souhlasně s tím, jest-li první nemizící derivace řádu sudého neb lichého; v prvním případě jest $f(x_0)$ maximem, resp. minimem, dle toho, je-li ona nemizící definice záporná, resp. kladná.

V příčině hodnot x_0, pro něž $f(x)$ nemá derivace, neb nekonečně velké derivace, kdežto derivace $f'(x)$ pro sousední hodnoty $f'(x_0 \pm h)$ existuje a jest pak konečná, možno také dle předchozí úvahy postupovati. Roste-li n. p. funkce $f(x)$ pokud $x > x_0$ a ubývá-li jí při $x < x_0$, t. j. jest-li $f'(x) \gtrless 0$ souhlasně s $x \gtrless x_0$ jest $f(x_0)$ patrně minimem, a v opáčném případě maximem.

113. **Příklady.**

1. Rozděliti dané číslo na dvě části tak, aby jich součin byl maximem.

Jest-li a dané číslo a x, $a - x$ části, na něž je dělíme, má

$$f(x) = x(a - x)$$

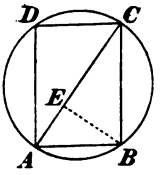
býti maximem. Položíme-li

$$f'(x) = a - 2x = 0,$$

nalezneme $x = \frac{a}{2}$, a poněvadž $f''(x) = -2 < 0$, má $f(x)$ pro $x = \frac{a}{2}$ maximum, nutno tedy číslo rozpůliti, a pak vznikne maximum $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$. Toť největší hodnota funkce $f(x)$ vůbec; neboť při $x < \frac{a}{2}$ jest $f'(x)$ kladná a při $x > \frac{a}{2}$ jest $f'(x)$ záporná hodnota, t. j. funkce $f(x)$ v intervallu $\left(-\infty \,..\, \frac{a}{2}\right)$ roste a v intervallu $\left(\frac{a}{2} \,..\, +\infty\right)$ klesá. Funkce $f(x)$ v intervallu $(-\infty \,..\, +\infty)$ nemá ani horní ani dolní meze.

2. Do dané kružnice napsati obdélník ABCD (obr. 6.) takový, aby výraz $V = \overline{AB} \,.\, \overline{AD}^2$ byl maximem.

Je-li průměr $\overline{AC} = 2a$, základna $\overline{AB} = x$, jest



Obr. 6.

$$V = x(4a^2 - x^2);$$

první derivace $\frac{dV}{dx} = 4a^2 - 3x^2$ vymizí pro $x = \pm \frac{2a}{\sqrt{3}}$, z kterýchž hodnot vzhledem k významu x vezmeme jen kladnou; poněvadž $\frac{d^2V}{dx^2} = -6x$ pro $x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ jest zaporná, podává toto x maximum

$$V_{max} = \frac{2a}{\sqrt{3}}\left(4a^2 - \frac{4a^2}{3}\right) = \frac{16a^3}{3\sqrt{3}}.$$

Hodnotu $x = \overline{AB}$ snadno sestrojíme, rozdělíme-li nějaký průměr $\overline{AC}$ na tři stejné díly a vztyčíme-li v třetině E na prů-

měr kolmici EB; pak patrně

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}\,\overline{AE} = 2a\frac{2a}{3},\quad \overline{AB} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Abstrahujeme-li od původního geometrického znění úkolu a tážeme-li se po extremních hodnotách funkce

$$f(x) = x(4a^2 - x^2),$$

nalezneme je pro $x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ jakožto maximum a pro $x = -\frac{2a}{\sqrt{3}}$ jakožto minimum.

Derivace $f'(x)$ jest při $|x| < \frac{2a}{\sqrt{3}}$ kladná, při $|x| > \frac{2a}{\sqrt{3}}$ záporná; v intervallu $\left(-\infty \,..\, -\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)$ tedy $f(x)$ klesá, pak v intervallu $\left(-\frac{2a}{\sqrt{3}} \,..\, +\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)$ stoupá, načež v intervallu $\left(\frac{2a}{\sqrt{3}} \,..\, +\infty\right)$ opět klesá. Nabývá tedy $f(x)$ pro $x = -\infty$ největší a pro $x = +\infty$ nejmenší hodnoty, totiž

$$\lim_{x=-\infty} f(x) = +\infty,\quad \lim_{x=+\infty} f(x) = -\infty.$$

3. Do dané ellipsy vepsati obdélník o maximálné ploše.

Jest-li rovnice dané ellipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a x, y souřadnice třeba kladné jednoho ze čtyř vrcholů vepsaného obdélníku, jest $4xy$ jeho plošný obsah a jde tedy o maximum výrazu $V = 4\frac{b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}$, v němž proměnná x jest vázána na intervall $(0 \,..\, a)$.

Poněvadž se při derivování kladný stálý faktor reprodukuje a na znamení výsledku vlivu nemá, možno se omeziti na vyšetření maxima funkce

$$f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2};$$

$f'(x) = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ vymizí pro $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ a poněvadž pro tuto hodnotu druhá derivace $f''(x) = \frac{-4x(a^2 - x^2) + x(a^2 - 2x^2)}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$ nabývá hodnoty záporné, podává $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ maximum plochy

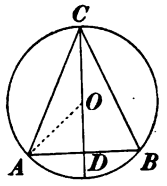
obdélníku

$$V_{max.} = \Big/_{x=\frac{a}{\sqrt{2}}} 4\frac{b}{a}\, x\sqrt{a^2 - x^2} = 2ab.$$

Z rovnice ellipsy plyne pro $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ druhá souřadnice vrcholu nalezeného obdélníku $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$, a tedy $x : y = a : b$, z čehož patrna konstrukce maximálného vepsaného obdélníku.

4. Do dané kružnice vepsati rovnoramenný trojúhelník maximálné plochy.

Budiž a poloměr dané kružnice (obr. 7.), O její střed, ABC vepsaný rovnoramenný trojúhelník o ramenech $\overline{AC} = \overline{BC}$, o výšce $\overline{CD}$. Pokládejme vrchol C za daný a stanovme trojúhelník délkou $\overline{OD} = x$, kterou počítáme kladně při $\overline{CD} > \overline{CO}$, a záporně při $\overline{CD} < \overline{CO}$. Pak jest plocha trojúhelníku



Obr. 7.

$$f(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2};$$

derivace

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{a^2 - ax - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

vymizí, když vymizí čítatel a to se stane pro $x = \frac{a}{2}$ a pro $x = -a$. Hodnota $x = -a$ vede k trojúhelníku o nullových rozměrech, tedy k řešení geometricky nezajímavému, kdežto $x = \frac{a}{2}$ podává trojúhelník rovnostranný. Poněvadž

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{-(a + 4x)(a^2 - x^2) + x(a^2 - ax - 2x^2)}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

pro $x = \frac{a}{2}$ nabývá hodnoty záporné $\frac{-3a \cdot \frac{3}{4}a^2}{(\frac{3}{4}a^2)^{\frac{3}{2}}}$, jest nalezený rovnostranný trojúhelník maximálný:

$$f(x)_{max.} = \Big/_{x=\frac{a}{2}} f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\, a^2.$$

5. Problém *Fermatův*: Po každé straně roviny MN (obr. 8.) jest dáno po bodu A, B; má se bod A spojiti s B takovou čarou, aby součet

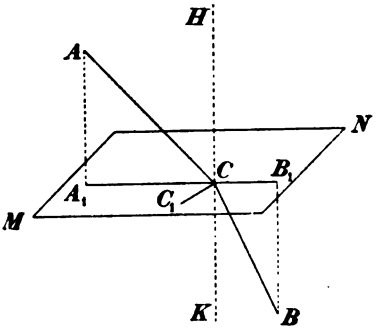
$$\frac{AC}{v} + \frac{CB}{v_1},$$

kde C značí bod proniku čáry s rovinou, byl minimálný při daných stálých v, v_1*).

Nutno zajisté především za čáry AC a CB vzíti přímky. Dále stačí omeziti vyšetřování na rovinu kolmou k rovině MN. neboť kdyby se bod C nenalézal v této kolmé rovině, nýbrž ležel mimo její stopu A_1B_1, n. p. v C_1, tu veďme C_1C kolmo k A_1B_1, i bude v trojúhelníku ACC_1 odvěsna kratší přepony $AC < AC_1$, a obdobně $BC < BC_1$, z čehož by plynula menší hodnota

$$\frac{AC}{v} + \frac{BC}{v_1} < \frac{AC_1}{v} + \frac{BC_1}{v_1},$$

a nemohla by čára AC_1B podávati minimum.



Obr. 8.

Položme $\overline{A_1B_1} = a$, $\overline{AA_1} = p$, $\overline{BB_1} = q$, $\overline{A_1C} = x$ a tedy

$$\overline{B_1C} = a - x, \quad \overline{AC} = \sqrt{x^2 + p^2},$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(a-x)^2 + q^2};$$

funkce, o jejíž minimum jde, jest

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + p^2}}{v} + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + q^2}}{v_1}.$$

První derivace

$$f'(x) = \frac{1}{v}\frac{x}{\sqrt{x^2 + p^2}} - \frac{1}{v_1}\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + q^2}}$$

vymizí pro x činící

$$\frac{1}{v}\frac{x}{\sqrt{x^2 + p^2}} = \frac{1}{v_1}\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + q^2}},$$

t. j.

$$\frac{1}{v}\frac{\overline{A_1C}}{\overline{AC}} = \frac{1}{v_1}\frac{\overline{B_1C}}{\overline{BC}} \text{ čili } \frac{\sin\alpha}{v} = \frac{\sin\beta}{v_1},$$

kde α, β značí úhly sevřené resp. přímkami AC, BC a kolmicí HK k rovině MN vedenou. Že pro dráhu ACB, poslední výminkou $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v}{v_1}$ stanovenou, nastává minimum funkce $f(x)$,

*) Fermatova methoda *de maximis et minimis* jakož i jeho řešení problému tangent se v podstatě shodují s methodou počtu differenciálného, tak sice, že Lagrange a jiní ho pokládali za vynálezce počtu infinitesimálného; v. *Lagrange*, Leçons sur le Calcul des fonctions, Leçon XVIII^e.

ukazuje druhá derivace

$$f''(x) = \frac{1}{v}\frac{p^2}{(x^2+p^2)^{3/2}} + \frac{1}{v_1}\frac{q^2}{[(a-x)^2+q^2]^{3/2}} > 0.$$

6. Budiž $y = x^x$, $x > 0$; $\underset{x=0}{/y} = \lim_{x=0} x^x = 1$.

Derivováním

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \log x).$$

Poněvadž x^x jest stále kladné a nikdy nevymizí, jest $\frac{dy}{dx} = 0$ jen při $\log x = -1$. t. j. $x = \frac{1}{e}$; pro $x < \frac{1}{e}$ jest patrně $\frac{dy}{dx} < 0$ a pro $x > \frac{1}{e}$ jest $\frac{dy}{dx} > 0$. Jest tedy y pro $x = \frac{1}{e}$ absolutním minimem $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = 0{\cdot}676411\ldots$, a to jest také nejmenší hodnota funkce y v intervallu $(0 \ldots \infty)$; funkce ta nemá ani maxima, ani horní meze v tomto intervallu.

7. Budiž daná funkce

$$y = x^{\frac{2}{3}},$$

která jest touto rovnicí definována v intervallu $(-\infty \ldots +\infty)$. Derivace $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ nevymizí pro žádné konečné x, avšak roste do ∞ pro $x = 0$; pro $x < 0$ jest $f'(x) < 0$, pro $x > 0$ jest $f'(x) > 0$, tedy nastává pro $x = 0$ minimum $f(0) = 0$, a hodnota ta jest vůbec nejmenší hodnota funkční, neboť funkci při záporných x ubývá, a při kladných přibývá. Maxima ani horní meze funkce v intervallu $(-\infty \ldots +\infty)$ nemá.

114. **Maxima a minima funkce více proměnných: nutné výminky.**

Funkce více proměnných $u = f(x, y, z, \ldots)$ stává se pro hodnoty $x_0, y_0, z_0, \ldots$ maximem, jest-li $f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ větší, a minimem, jest-li tato hodnota menší než $f(x, y, z, \ldots)$ pro všecka $x, y, z, \ldots$ jistého okolí místa $x_0, y_0, z_0, \ldots$, t. j. platí-li

$$f(x_0, y_0, z_0, \ldots) > f(x\ y, z, \ldots), \text{ resp. } < f(x, y, z, \ldots)$$

pro všecka $x, y, z, \ldots$ taková, že číselné hodnoty rozdílů $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0, \ldots$ nepřesahují určitá kladná čísla. *Maximum* $f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ *jest tedy v jistém okolí místa* $x_0, y_0, z_0, \ldots$ *největší, a minimum nejmenší funkční hodnota.*

Uvažujme funkci jedné proměnné $f(x, y_0, z_0, \ldots)$; jest-li u maximem neb minimem pro $x_0, y_0, z_0, \ldots$, jest $f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ největší, resp. nejmenší hodnota funkce $f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ v jistém okolí místa x_0, t. j. maximem, resp. minimem této funkce jedné proměnné.

Má-li tedy derivace $f'_x(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ určitou konečnou hodnotu, musí to býti hodnota 0. Obdobný výrok platí v příčině ostatních proměnných, čímž nalézáme větu:

Má-li funkce $u = f(x, y, z, \ldots)$ na místě $x_0, y_0, z_0, \ldots$ maximum neb minimum, tu vymizí v tomto místě všecky její první parciálné derivace, ač-li mají určitých konečných hodnot.

Řešením n rovnic o n neznámých

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0, \ldots$$

obdržíme tedy ona místa $x_0, y_0, z_0, \ldots$, v nichž parciálné derivace jsou určité a konečné a jež mohou podávati maximum neb minimum funkce o n proměnných $u = f(x, y, z, \ldots)$.

Abychom blíže vytkli, kdy pro takové řešení může skutečně vzniknouti maximum neb minimum funkce u, položme

$$x = x_0 + ht, \; y = y_0 + kt, \; z = z_0 + lt, \ldots$$

a

$$u = f(x_0 + ht, \; y_0 + kt, \; z_0 + lt, \ldots) = \mathrm{F}(t).$$

Jest-li u maximem neb minimem v místě $x_0, y_0, z_0, \ldots$, platí totéž patrně o funkci $\mathrm{F}(t)$ pro $t = 0$.

Jsou-li parciálné derivace funkce $f(x, y, z, \ldots)$ spojité, má $\mathrm{F}(t)$ konečnou derivaci

$$\mathrm{F}'(t) = f'_x(x, y, z, \ldots)\frac{\partial x}{\partial t} + f'_y(x, y, z, \ldots)\frac{\partial y}{\partial t} + f'_z(x, y, z, \ldots)\frac{\partial z}{\partial t} + \ldots$$

$$= f'_x(x, y, z, \ldots)\,h + f'_y(x, y, z, \ldots)\,k + f'_z(x, y, z, \ldots)\,l + \ldots,$$

a tedy pro maximum neb minimum musí platiti

$$\mathrm{F}'(0) = f'_x(x_0, y_0, z_0, \ldots)\,h + f'_y(x_0, y_0, z_0, \ldots)\,k + f'_z(x_0, y_0, z_0, \ldots)\,l + \ldots = 0,$$

nechť jsou $h, k, l, \ldots$ jakékoli hodnoty. To vymáhá, aby

$$f'_x(x_0, y_0, z_0, \ldots) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0, \ldots) = 0,$$
$$f'_z(x_0, y_0, z_0, \ldots) = 0, \ldots,$$

jakož jsme již nalezli.

Za supposice, že má $f(x, y, z, \ldots)$ i druhé parciálné derivace a spojité, obdržíme

$$F''(t) = f''_{xx}(x, y, z, \ldots)\, h^2 + f''_{yy}(x, y, z, \ldots)\, k^2 + \ldots + 2f''_{xy}(x, y, z, \ldots)\, hk + \ldots$$

Pro maximálné, resp. minimálné F(0) musí (čl. 112.)

$$F''(0) \leqq 0, \text{ resp. } F''(0) \geqq 0,$$

čímž nalézáme nutné, však nikoli postačující výminky pro extremní hodnoty:

Aby funkce $f(x, y, z, \ldots)$ v místě $x_0, y_0, z_0, \ldots$, v němž všecky její první parciálné derivace mizí a druhé jsou spojité, mohla býti maximem, resp. minimem, nesmí kvadratická forma proměnných $h, k, l, \ldots$

$$F''(0) = f''_{xx}(x_0, y_0, z_0, \ldots)\, h^2 + f''_{yy}(x_0, y_0, z_0, \ldots)\, k^2 + \ldots + 2f''_{xy}(x_0, y_0, z_0, \ldots)\, hk + \ldots$$

nabývati žádných kladných, resp. záporných hodnot, nechť jsou $h, k, l, \ldots$ jakékoli hodnoty.

Píšeme-li $dx, dy, dz, \ldots$ místo hodnot $h, k, l, \ldots$, můžeme vymizení parciálných derivací funkce f v místě $x_0, y_0, z_0, \ldots$ nahraditi rovnicí $df = 0$, a $F''(0)$ psáti d^2f; čímž nalezený výsledek možno takto vysloviti:

Aby funkce $f(x, y, z, \ldots)$ v místě $x_0, y_0, z_0, \ldots$, v němž totálný differenciál $df(x, y, z, \ldots)$ vymizí, mohla býti maximem, resp. minimem, nesmí druhý totálný differenciál $d^2f(x, y, z, \ldots)$ nabývati žádných kladných, resp. záporných hodnot při libovolných differenciálech $dx, dy, dz, \ldots$

Po způsobu *Gaussově* zde nazvána racionálná celistvá a homogenní funkce proměnných $h, k, l \ldots$ *formou*; stupeň oné funkce se označuje ovšem také jakožto stupeň formy.

Forma sluje *definitní*, vymizí-li jen tenkráte, kdy všecky proměnné, ovšem reálné, vymizí; n. p. $x^2 + y^2 + z^2$ jest definitní kvadratická forma.

Forma sluje *indefinitní*, nabývá-li jak kladných, tak záporných hodnot; n. p. každá forma lichého stupně, jejíž koefficienty nejsou vesměs 0, jest indefinitní, neboť změna znamení u všech proměnných má v zápětí změnu znamení celé formy.

Každá forma, jsouc celistvou funkcí, jest spojitá. Nabývá-li hodnot různě označených, nabývá také hodnoty 0 v nekonečném

množství míst*), pročež indefinitní forma nemůže býti zároveň definitní, aneb naopak; forma definitní má tedy pro všecky hodnoty proměnných totéž znamení, vyjma pro hodnoty nullové, pro něž vymizí. Ovšem ale může býti forma taková, že není ani definitní, ani indefitní, totiž taková, že sice vymizí pro hodnoty proměnných, které nejsou všecky nullami, že ale jinak má vždy totéž znamení, n. p. forma $x^2 + 2xy + y^2$ č. $(x + y)^2$.

115. **Nutné a postačující výminky pro maximum neb minimum.**

Dle věty Taylorovy máme

$$f(x_0 + h,\ y_0 + k,\ z_0 + l, \ldots) = f(x_0,\ y_0,\ z_0, \ldots) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 k + \ldots + R_2,$$

kde index 0 značí, že do příslušných derivací za proměnné nutno vložiti x_0, y_0, z_0, . . a kde zbytek R_2 jest symbolicky dán (čl. 92.)

$$R_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \ldots\right)^2_\vartheta f;$$

v něm index ϑ značí, že nutno po rozvinutí symbolu proměnné nahraditi hodnotami $x_0 + \vartheta h$, $y_0 + \vartheta k$, . ., při čemž ϑ označuje jistou hodnotu mezi 0 a 1 položenou.

Pro hodnoty x_0, y_0, z_0, . . annullující první parciálné derivace funkce f tedy máme

$$f(x_0 + h,\ y_0 + k, \ldots) = f(x_0, y_0, \ldots) + R_2.$$

Aby pak $f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ bylo maximem, resp. minimem, t. j. aby bylo

$$f(x_0 + h,\ y_0 + k, \ldots) < f(x_0,\ y_0, \ldots), \text{ resp. } > f(x_0,\ y_0, \ldots),$$

jest nutné a stačí, aby pro všecky přírůsty h, k, . . číselně menší než určitá kladná čísla, platila nerovnost

$$R_3 < 0, \text{ resp. } R_2 > 0.$$

Toto nutné a postačující kriterium nemá však valné ceny praktické vzhledem k okolnosti, že do výrazu pro R_2 vchází neznámá hodnota ϑ. V případě funkce dvou neodvisle proměnných $f(x, y)$ možno však snadno z něho odvoditi pravidlo více uspokojující:

---

*) Důkaz této věty v. *Genocchi-Peano*, l. c. pag. 121.

Jest-li funkce $f(x, y)$ i se svými prvními a druhými derivacemi spojitá v okolí místa x_0, y_0, v němž

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

a jest-li pro x_0, y_0 výraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \tag{1}$$

kladný, tu při $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 < 0$ jest $f(x_0, y_0)$ maximem a při $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 > 0$ minimem.

Jest-li pro x_0, y_0 výraz (1) *záporný, není $f(x_0, y_0)$ ani maximem ani minimem, a jest-li pro x_0, y_0 výraz ten nullou, není o existenci maxima neb minima rozhodnuto.*

Za supposic učiněných o funkci $f(x, y)$ platí Taylorův rozvoj

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1 \cdot 2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\vartheta h^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_\vartheta hk + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_\vartheta k^2\right].$$

Supponujme nejprve, že výraz (1) pro x_0, y_0 jest kladný, t. j. že

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0^2 > 0. \tag{2}$$

Nerovnost ta vymáhá, aby $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \gtrless 0$, a vzhledem k spojitosti funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ soudíme, že pro dosti malé $|h|$ a $|k|$ bude také $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\vartheta \gtrless 0$. Píšeme-li za příčinou stručnosti A, B, C místo

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\vartheta, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_\vartheta, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_\vartheta,$$

máme tedy $A \gtrless 0$ a poslední rozvoj možno psáti

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2A}\,[A^2h^2 + 2ABhk + ACk^2]$$

$$= \frac{1}{2A}\,[(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)\,k^2].$$

Výraz (1) jest pro $x = x_0$, $y = y_0$ dle supposice kladný, a tedy vzhledem k spojitosti druhých derivací funkce f také kladný

pro $x = x_0 + \vartheta h$, $y = y_0 + \vartheta k$, jsou-li $|h|$, $|k|$ dosti malé, t. j. pak máme $AC - B^2 > 0$. To ale ukazuje, že v poslední rovnici závorka na pravo jest vždy kladná, mizíc jen pro $h = 0$, $k = 0$; má tedy $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ stálé znamení a s. totéž jako A, čili i jako $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$. Jest tedy $f(x_0, y_0)$ při $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 < 0$ maximem a při $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 > 0$ minimem; vzhledem k (2) jest patrně souhlasně $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 < 0$, resp. > 0.

Je-li výraz (2) rovný nulle, nemůžeme souditi, že $AC - B^2$ jest kladné, a že tudíž pravá strana má stálé znamení.

Je-li konečně výraz (2) záporný, tu pro h, k hovící požadavku $Ah + Bk = 0$ jest pravá strana s A opáčného znamení, a pro $k = 0$ nebo dosti malé k téhož znamení jako A, tak že není $f(x_0, y_0)$ ani maximem ani minimem.

V příčině maxim a minim funkcí více proměnných citujme bez důkazu větu, kterou uveřejnili *Genocchi-Peano*, l. c. pag. 183. a tamže dokázali*):

Jestliže pro $x = x_0$, $y = y_0$, . . všecky derivace nižšího než n-ho řádu funkce $u = f(x, y, z, . .)$ vymizí a jest-li v Taylorově rozvoji pro $f(x_0 + h, y_0 + k, . .)$ člen homogenní a n-ho stupně v h, k, . . formou indefinitní, tu $f(x_0, y_0, . .)$ není ani maximem ani minimem.

---

*) Sr. také poznámku na str. 332., l. c., v které se jednoduchým a poučným příkladem

$$f(x, y) = (y^2 - 2px)(y^2 - 2qx), \quad p > q > 0,$$

vyvrací pravidlo u *Serret-a* v Calcul diff. a i jinde uvedené: „Le maximum ou le minimum *a lieu*, si pour les valeurs de h, k, l, . . qui annullent d^2f et d^3f, d^4f a constamment le signe — ou le signe +."

Pro $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ vymizí obě derivace f'_x, f'_y a máme

$$f(h, k) = 4pqh^2 - 2(p + q)hk^2 + k^4.$$

Člen kvadratický jest kladný pro každé h, k vyjma $h = 0$, pro kterou hodnotu mizí současně s členem kubickým, kdežto člen bikvadratický jest kladný; dle hořejšího pravidla by měla funkce $f(x, y)$ pro $x = 0$, $y = 0$ minimum. Tomu ale není tak; položíme-li totiž $y^2 = 2lx$, tu pro $\lim x = 0$ také $\lim y = 0$ a zároveň

$$f(x, \sqrt{2lx}) = 4(l - p)(l - q)x^2.$$

Tato hodnota jest kladná, je-li l mimo intervall $(q \ldots p)$, a záporná, je-li l v tomto intervallu; nabývá tedy $f(x, y)$ v každém okolí místa (0, 0) jak kladných tak záporných hodnot, t. j. hodnot větších i menších než $f(0, 0) = 0$, a není tudíž $f(0, 0)$ ani maximem ani minimem.

Jest-li však onen člen definitní kladnou formou, jest $f(x_0, y_0, \ldots)$ *minimem, a je-li definitní zápornou formou, jest* $f(x_0, y_0)$ *maximem.*

Že v případě dvou neodvisle proměnných se tato věta shoduje s předchozí, jest patrné.

Věta právě citovaná poukazuje k důležitosti rozhodnutí o tom, je-li daná kvadratická forma definitní čili nic, o čemž jednáme v následujícím článku.

116. **Definitní formy kvadratické.**

Jde o to, nalézti kriterium rozhodující nejprve o tom, zda-li daná forma kvadratická $\psi(h, k, l, \ldots)$ jest kladnou definitní formou, t. j. formou nabývající jen kladných hodnot pro libovolné hodnoty $h, k, l, \ldots$, však vesměs nemizící.

Jest-li ψ funkcí jen jedné neurčité h, tedy $\psi = Ah^2$, jest $\psi > 0$ pro každé $h \gtrless 0$, a $\psi = 0$ jen pro $h = 0$, když $A > 0$.

Jest-li ψ závislé na dvou proměnných, máme

$$\psi = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

Supponujme, že ψ jest kladná forma definitní; pak pro $h \gtrless 0$, $k = 0$ máme $\psi = Ah^2$, a poněvadž ψ má býti kladné, soudíme, že $A > 0$.

Píšeme-li ψ ve tvaru vzhledem k $A > 0$ vždy možném

$$\psi = \frac{1}{A}[(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2],$$

a určíme-li h, k tak, aby $Ah + Bk = 0$, máme

$$\psi = \frac{1}{A}(AC - B^2)k^2 > 0$$

a tedy musí $AC - B^2 > 0$.

To lze také přímo nahlédnouti, píšeme-li

$$f(h, k) = (k^3 - 2ph)(k^2 - 2qh).$$

Při $h < 0$ jest $f(h, k) > 0$; aby $f(h, k)$ podrželo i při $h > 0$ své znamení, musily by pak platiti buď nerovnosti $k^2 > 2ph$, $k^2 > 2qh$ pro náš účel bezvýznamné, aneb nerovnosti $k^2 < 2ph$, $k^2 < 2qh$, t. j. $k^2 < 2qh$, a tedy $|k| < \sqrt{2qh}$. Vzhledem k tomu jest patrno, že není možná udati dvě kladná čísla ε, η taková, aby při $|h| < \varepsilon$, $|k| < \eta$ bylo vždy $f(h, k) > 0$; volivše totiž ε jakkoli, možno volbou dosti malého kladného h toho docíliti, že nerovnosti $|k| < \sqrt{2qh}$ není vyhověno *všemi* k, která číselně jsou $< \eta$.

Výminky $A > 0$, $AC - B^2 > 0$ nejsou jen nutné, ale ony také stačí, aby ψ byla definitní kladná forma, jakož poslední tvar této formy ukazuje.

Jest-li ψ funkcí více než dvou proměnných h, k, l, . ., možno ψ položiti do tvaru

$$\psi = Ah^2 + 2Bh + C,$$

v němž A značí stálou, B formu prvního stupně proměnných k, l, . . a C formu kvadratickou týchž proměnných.

Supponujme opět, že ψ jest kladná definitní forma; pak pro $k = 0$, $l = 0$, . ., ale $h \gtrless 0$ vymizí B i C a máme $\psi = Ah^2$, z čehož soudíme $A > 0$. Pišme nyní ψ ve tvaru

$$\psi = \frac{1}{A}[(Ah + B)^2 + AC - B^2],$$

v němž $AC - B^2$ jest forma kvadratická proměnných k, l, . . Mají-li tyto proměnné libovolné hodnoty, jež však všecky nejsou nullami, a volíme-li h tak, aby $Ah + B = 0$, tu obdržíme

$$\psi = \frac{1}{A}(AC - B^2),$$

a to má býti > 0; musí tedy $AC - B^2 > 0$, t. j. $\psi_1(k, l, . .)$ $= AC - B^2$ jest kvadratická forma vždy kladná a různá od nully, vyjma případ, kdy všecky proměnné jsou 0.

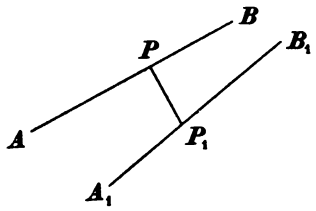
Aby ψ byla kladná definitní forma, jest tedy nutné, aby $A > 0$ a dále, aby $AC - B^2$ byla kladná definitní forma proměnných k, l, . . Výminky ty ale také stačí; neboť při libovolném h a při hodnotách k, l, . . jen tím obmezených, že nemají *všecky* býti 0, nabývá v posledním výraze pro ψ první sčítanec hodnoty kladné neb nullové, druhý hodnoty kladné, a jest tedy $\psi > 0$, jsou-li ale všecky proměnné k, l, . . nullami, avšak $h \gtrless 0$, jest opět $\psi = Ah^2 > 0$.

Rozhodnutí o tom, jest-li daná forma kvadratická definitní a kladná, jest tím převedeno na obdobné rozhodnutí o formě obsahující o jednu proměnnou méně; pokračujeme-li tímto způsobem, dojdeme konečně k formě o dvou, neb chceme-li jen o jedné proměnné, o nichž již rozhodnuto.

Jde-li za druhé o to, rozhodnouti, je-li kvadratická forma ψ definitní a záporná, jest to totéž jako rozhodnouti, je-li $-\psi$ definitní a kladná.

117. Příklady.

1. Nechť se stanoví na dvou daných mimoběžných přímkách po bodu, by jich vzdálenost byla minimální.



Obr. 9.

Přímka první AB (obr. 9.) budiž dána bodem A o pravoúhlých souřadnicích a, b, c a úhly α, β, γ, jež uzavírá s kladnými osami, přímka druhá A_1B_1 bodem $A_1(a_1, b_1, c_1)$ a směrem $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

Je-li $P(x, y, z)$ libovolný bod přímky první, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ libovolný bod přímky druhé a položíme-li $\overline{AP} = r$, $\overline{A_1P_1} = r_1$, máme

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= a + r\cos\alpha, & x_1 &= a_1 + r_1\cos\alpha_1,\\ y &= b + r\cos\beta, & y_1 &= b_1 + r_1\cos\beta_1,\\ z &= c + r\cos\gamma, & z_1 &= c_1 + r_1\cos\gamma_1, \end{aligned}$$

čímž souřadnice bodů P, P_1 vyjádřeny dvěma neodvisle proměnnými r, r_1. V těchto formulích nutno pokládati r za kladnou veličinu, má-li AP směr (α, β, γ), a za zápornou, je-li opáčného směru; obdobně o r_1.

Jde o minimum výrazu

$$V = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$$

závislého na proměnných r, r_1.

Zde

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial r} = (x_1 - x)\frac{\partial x}{\partial r} + (y_1 - y)\frac{\partial y}{\partial r} + (z_1 - z)\frac{\partial z}{\partial r},$$

t. j. vzhledem k předchozím rovnicím (3)

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial r} = (x_1 - x)\cos\alpha + (y_1 - y)\cos\beta + (z - z)\cos\gamma;$$

obdobně

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial r_1} = (x_1 - x)\cos\alpha_1 + (y_1 - y)\cos\beta_1 + (z_1 - z)\cos\gamma_1.$$

Maximum neb minimum V může tedy vzniknouti pro hodnoty r, r_1 hovící rovnicím

$$(4)\qquad \begin{aligned} (x_1 - x)\cos\alpha + (y_1 - y)\cos\beta + (z_1 - z)\cos\gamma &= 0,\\ (x_1 - x)\cos\alpha_1 + (y_1 - y)\cos\beta_1 + (z_1 - z)\cos\gamma_1 &= 0. \end{aligned}$$

Označíme-li (λ, μ, ν) směr přímky PP_1 a δ její délku, máme

$$x_1 - x = \delta \cos\lambda, \quad y_1 - y = \delta \cos\mu, \quad z_1 - z = \delta \cos\nu,$$

čímž poslední dvě rovnice přejdou do

$$\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu = 0,$$
$$\cos\alpha_1 \cos\lambda + \cos\beta_1 \cos\mu + \cos\gamma_1 \cos\nu = 0,$$

a vyjadřují, že hledaná minimální délka δ jest kolmá k daným přímkám AB, A_1B_1. Směr λ, μ, ν k daným směrům (α, β, γ) $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ kolmý jest však dán formulemi

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta \cos\gamma_1 - \cos\gamma \cos\beta_1}{\pm \sin\vartheta},$$
$$\cos\mu = \frac{\cos\gamma \cos\alpha_1 - \cos\alpha \cos\gamma_1}{\pm \sin\vartheta},$$
$$\cos\nu = \frac{\cos\alpha \cos\beta_1 - \cos\beta \cos\alpha_1}{\pm \sin\vartheta},$$

kde ϑ značí sklon daných přímek, a znamení ve jmenovatelích si korrespondují.

Promítnutím přímky AA_1 na přímku PP_1 máme ihned

$$\delta = (a_1 - a)\cos\lambda + (b_1 - b)\cos\mu + (c_1 - c)\cos\nu$$

čili

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 - a, & b_1 - b, & c_1 - c \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \end{vmatrix} : \pm \sin\vartheta,$$

kde nutno vzíti $\sin\vartheta$ s oním znamením, které podává kladnou hodnotu nejkratší vzdálenosti δ. Poloha její v prostoru jest vytčena hodnotami r, r_1 plynoucími řešením lineárných rovnic (4).

Zbývá zjistiti počtem, že tyto hodnoty r, r_1 činí výraz V skutečně minimem. Máme pro tyto hodnoty

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = -\frac{\partial x}{\partial r}\cos\alpha - \frac{\partial y}{\partial r}\cos\beta - \frac{\partial z}{\partial r}\cos\gamma,$$

t. j.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial r_1} = \frac{\partial x_1}{\partial r_1}\cos\alpha + \frac{\partial y_1}{\partial r_1}\cos\beta + \frac{\partial z_1}{\partial r_1}\cos\gamma$$
$$= \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1,$$

t. j.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial r_1} = \cos\vartheta,$$

a konečně

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r_1^2} = \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1,$$

z čehož

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial r_1^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial r_1}\right)^2\right] = 1 - \cos^2\vartheta = \sin^2\vartheta > 0,$$

pročež vzhledem k $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = 2 > 0$ nastává skutečně minimum $V = \delta^2$.

2. Stanoviti maxima a minima výrazu

$$V = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

Zde

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} = Ax + By + D, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial y} = Bx + Cy + E,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x} = A, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = B, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = C.$$

Řešíme-li rovnice $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ nalézáme při $AC - B^2 \gtrless 0$ hodnoty

$$x_0 = \frac{BE - CD}{AC - B^2}, \quad y_0 = \frac{BD - AE}{AC - B^2},$$

pro něž by mohla vzniknouti extremní hodnota V. Poněvadž

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] = AC - B^2,$$

máme při $AC - B^2 > 0$ extremní hodnotu $V(x_0, y_0)$ a s. při $A < 0$ maximum a při $A > 0$ minimum.

Jest-li $AC - B^2 < 0$, nenastane extremní hodnota.

Zbývá uvážiti případ, kdy $AC - B^2 = 0$ čili kdy $A : B = B : C$. Mají-li lineárné rovnice $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ míti řešení, musí tu patrně platiti složitá proporce

$$A : B : D = B : C : E,$$

t. j. musí

$$C = \frac{B^2}{A}, \quad E = \frac{BD}{A},$$

a možno pak psáti

$$V = A\left(x + \frac{B}{A}y + \frac{D}{A}\right)^2 + \frac{AF - D^2}{A^2}.$$

Pak

$$dV = 2A\left(x + \frac{B}{A}y + \frac{D}{A}\right)\left(dx + \frac{B}{A}dy\right)$$

$$d^2V = 2A\left(dx + \frac{B}{A}dy\right)^2; \quad d^3V = 0.$$

Pro extremní V musí $dV = 0$, t. j. $x + \frac{B}{A}y + \frac{D}{A} = 0$; a pro každé dvě hodnoty x, y, hovící této rovnici má d^2V stále znamení hodnoty A, jen při $dx + \frac{B}{A}dy = 0$ jest $d^2V = 0$, kdežto vyšší differenciály jsou 0. Nenastane tedy vlastně žádný extrem V; pro hodnoty x_0, y_0, hovící $x_0 + \frac{B}{A}y_0 + \frac{D}{A} = 0$, ale možno tvrditi, že $V_{x,y} - V_{x_0,y_0} \geqq 0$ při $A > 0$, a že $V_{x,y} - V_{x_0,y_0} \leqq 0$ při $A < 0$; v prvním případě jest V_{x_0,y_0}, t. z. *nevlastním minimem*, t. j. sousední hodnoty $V_{x,y}$ jsou větší aneb rovny V_{x_0,y_0}, v druhém jest V_{x_0,y_0}, t. z. *nevlastním maximem*.

3. Rozložiti dané kladné číslo a na n částí x, y, z, . . u, $a - x - y \ldots - u$ tak, aby součin

$$f = x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots u^\lambda (a - x - y - z \ldots - u)^\mu,$$

kde α, β, . . μ jsou kladná celistvá čísla, byl maximem.

Logarithmickým differencováním máme

(5)
$$\frac{df}{f} = \alpha\frac{dx}{x} + \beta\frac{dy}{y} + \ldots + \lambda\frac{du}{u} - \mu\frac{dx + dy + \ldots + du}{a - x - y \ldots - u},$$

a opětným differencováním součinu $\frac{1}{f}df$,

(6)
$$\frac{d^2f}{f} - \left(\frac{df}{f}\right)^2 = -\alpha\left(\frac{dx}{x}\right)^2 - \beta\left(\frac{dy}{y}\right)^2 - \ldots - \lambda\left(\frac{du}{u}\right)^2 - \mu\frac{(dx + dy + \ldots + du)^2}{(a - x - y \ldots - u)^2}.$$

Vypočteme-li z (5) df a položíme-li jej $= 0$, vyhovíme tomuto požadavku při libovolných differenciálech dx, dy, . . du,

annullujeme-li jejich koefficienty, t. j. parciálné derivace funkce f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\alpha}{x} - \frac{\mu}{a - x - y \,.\,. - u}\right) f,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\beta}{y} - \frac{\mu}{a - x - y \,.\,. - u}\right) f,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\lambda}{u} - \frac{\mu}{a - x - y \,.\,. - u}\right) f.$$

Nepřihlížejíce k hodnotám annullujícím f, t. j. k nullovým hodnotám $x, y, \,.\,. u, a - x - y \,.\,. - u$, může nastati extremní hodnota při

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \,.\,, = \frac{\lambda}{u} = \frac{\mu}{a - x - y \,.\,. - u},$$

z kterýchž rovnic soudíme, že

(7)
$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \,.\,. = \frac{u}{\lambda} = \frac{a - x - y \,.\,. - u}{\mu} = \frac{a}{\alpha + \beta + \,.\,. + \lambda + \mu},$$

čímž nalezeny $x, y, \,.\,. u$ a tím i příslušná hodnota

$$f_0 = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \,.\,. + \mu}\right)^{\alpha + \beta + \,.\,. + \mu} \alpha^{\alpha}\, \beta^{\beta} \,.\,. \lambda^{\lambda} \mu^{\mu}.$$

Z rovnice (6) plyne vzhledem k $df = 0$ příslušná hodnota

$$d^2 f = \left[- \alpha \left(\frac{dx}{x}\right)^2 - \,.\,. - \lambda \left(\frac{du}{u}\right)^2 - \mu \frac{(dx + dy + \,.\,. + du)^2}{(a - x - y \,.\,. - u)^2}\right] \cdot f,$$

vložíme-li za proměnné právě nalezené hodnoty ze (7); pro tyto hodnoty jest patrně $d^2 f < 0$, a vzhledem k spojitosti tohoto výrazu soudíme, že také $R_2 = \frac{1}{2} d^2 f_\vartheta < 0$, t. j. (čl. 115.), že hodnota f_0 jest maximem.

118. **Relativná maxima a minima.**

Tímto názvem se označují extremní hodnoty výrazu závislého na dvou neb více proměnných, které však nejsou neodvislé, nýbrž vázány jednou nebo více relacemi.

Jde-li n. p. o extremní hodnoty výrazu

(8) $$u = F(x, y, z),$$

v němž se vyskytují proměnné x, y, z, vázané danou relací

(9) $$f(x, y, z) = 0,$$

možno z pokládati za implicitní funkci definovanou rovnicí (9), a tedy u za výraz závislý na dvou neodvisle proměnných x, y.

Máme tedy

$$du = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz,$$

kde dz stanoveno rovnicí

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0.$$

Přičteme-li k du poslední výraz násobený libovolným faktorem $-\lambda$, máme

$$du = \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz.$$

Extremní hodnoty u mohou vzniknouti tam, kde $du = 0$ při libovolném dx, dy; volíme-li λ tak, aby koefficient při dz vymizel, musejí tedy i koefficienty při dx, dy vymizeti, t. j.

$$(10)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial y} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial z} - \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Z rovnic (9) a (10) obdržíme hodnoty x, y, z, λ, pro něž může u býti maximem neb minimem.

Výrazy po levých stranách rovnic (10) jsou však parciálné derivace funkce $F - \lambda f$, pokládáme-li v ní x, y, z za neodvisle proměnné, z čehož patrno, že relativní extremy funkce $F(x, y, z)$ za vedlejší výminky $f = 0$ mohou vzniknouti jen pro hodnoty x, y, z činící $F - \lambda f$ absolutním maximem neb minimem, kde λ značí stálou.

Zcela obdobně plyne obecnější pravidlo též od *Lagrange-a* pocházející:

Aby se stanovila maxima neb minima funkce $F(x, y, z, \ldots)$ za vedlejších výminek,

$$(11)\quad f_1(x, y, z, \ldots) = 0,\ f_2(x, y, z, \ldots) = 0, \ldots,\ f_m(x, y, z, \ldots) = 0,$$

utvoří se funkce

$$\psi = F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m$$

a hledají se hodnoty proměnných, jež hoví rovnicím

$$(12)\qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \ldots,$$

při kterémž derivování se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ pokládají za stálé a $x, y, z, \ldots$ za neodvisle proměnné.

Rovnice (11) a (12), jichž jest patrně právě tolik co neznámých x, y, z, . ., λ_1, . ., λ_m, stanoví neznámé, jež mohou učiniti F relativním maximem neb minimem.

Ptejme se n. p. po přímém hranolu, vepsaném do daného trojosého ellipsoidu, o maximálném krychlovém obsahu.

Rovnice ellipsoidu vztaženého k hlavním osám budiž

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

a buďte x, y, z kladné souřadnice vrcholu vepsaného hranolu, spadajícího do prvého oktantu; pak jde o maximum výrazu

$$F = xyz,$$

podávajícího osmou část obsahu hranolu.

Utvořme výraz

$$F - \lambda f = xyz - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right),$$

a položme $= 0$ jeho parciálné derivace dle x, y, z vzaté:

$$yz - \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \quad zx - \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \quad xy - \frac{2\lambda z}{c^2} = 0.$$

Jde o řešení těchto tří rovnic a rovnice $f = 0$ dle x, y, z, λ.

Násobíme-li tyto rovnice, resp. x, y, z, vidíme ihned, že součin xyz má hodnotu

$$\frac{2\lambda x^2}{a^2} = \frac{2\lambda y^2}{b^2} = \frac{2\lambda z^2}{c^2},$$

a že tedy

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2};$$

vzhledem k $f = 0$ jest společná hodnota těchto tří podílů $\frac{1}{3}$, a

$$x_0 = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y_0 = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z_0 = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

souřadnice vrcholu hranolu, který může býti extremem. Proporce $x_0 : y_0 : z_0 = a : b : c$ podává ihned konstrukci tohoto vrcholu.

Abychom rozhodli, dávají-li tyto hodnoty skutečně extrem, stanovme druhé derivace funkce F neodvisle proměnných x, y; z jest též funkcí těchto, danou rovnicí $f = 0$. Tak nalezneme

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\left(z + x\frac{\partial z}{\partial r}\right), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x\left(z + y\frac{\partial z}{dy}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = y\left(2\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\left(\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = x\left(2\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right);$$

derivováním rovnice $f = 0$ nalezneme

$$\frac{x}{a^2} + \frac{z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

a opětným derivováním další tři rovnice

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0, \quad \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

z nichž pro hodnoty x_0, y_0, z_0 plynou derivace

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c}{b},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2\sqrt{3}\,\frac{c}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\sqrt{3}\,\frac{c}{ab},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\sqrt{3}\,\frac{c}{b^2},$$

jež vloženy do předchozích rovnic podávají

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 = -\frac{4bc}{a\sqrt{3}}, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = -\frac{2c}{\sqrt{3}},$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 = -\frac{4ac}{b\sqrt{3}}.$$

Vzhledem k

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)_0^2 = 4c^2 > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 < 0,$$

soudíme, že $F(x_0, y_0, z_0) = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$ jest maximem.

Kapitola IX.

Theorie čar v rovině.

119. Tečna, normála.

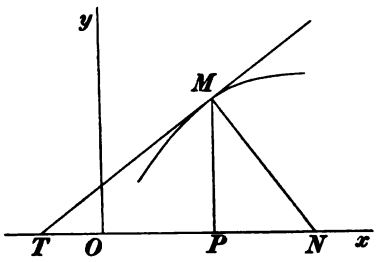
Značí-li x, y pravoúhlé souřadnice v rovině, stanoví rovnice $y = f(x)$ aneb $F(x, y) = 0$ čáru, t. j. body, jichž souřadnice této rovnici hoví, naplňují čáru (čl. 47.).

Často se stanoví čára tím, že se vyjádří souřadnice x, y bodu jejího jakožto funkce nové proměnné t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t);$$

eliminací t z těchto dvou rovnic vychází rovnice mezi x, y, tedy hořejší rovnice čáry.

Užíváme-li polárných souřadnic ϱ, ω, bývá čára dána rovnicí $\varrho = f(\omega)$, aneb rovnicí $F(\varrho, \omega) = 0$. Od hořejších tvarů přejdeme k rovnici polárné, nahradíme-li x, y, resp. $\varrho \cos \omega$, $\varrho \sin \omega$, při čemž ovšem pól klademe do počátku souřadnic a osu polárnou do kladné osy x. Tímto způsobem přeneseme výsledky odvozené nejprve při souřadnicích pravoúhlých do souřadnic polárných.



Obr. 10.

Tečna MT čáry $y = f(x)$ v bodě $M(x, y)$ (obr. 10.) má směrnici $f'(x)$ čili $\frac{dy}{dx}$ (čl. 60.), a jest tedy její rovnice

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

značí-li X, Y běžné souřadnice. Přímka MN vedená bodem do-

tyčným kolmo k tečně sluje normálou; její směrnice jest tedy $-\frac{1}{f'(x)}$ čili $-\frac{dx}{dy}$, a tudíž rovnice normály

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x).$$

Dána-li čára rovnicí tvaru $F(x, y) = 0$, máme (čl. 93.)

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

a tedy rovnice tečny

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = 0,$$

a normály:

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Dána-li konečně čára rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, máme $dx = \varphi'(t)\,dt$, $dy = \psi'(t)\,dt$ a tedy rovnice tečny

$$Y - y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}(X - x) \text{ čili } \frac{X - x}{\varphi'(t)} = \frac{Y - y}{\psi'(t)},$$

a rovnice normály

$$(X - x)\,\varphi'(t) + (Y - y)\,\psi'(t) = 0.$$

Značíme-li T a N průsečíky tečny a normály s osou úseček Ox, tu se nazývají $\overline{MT}$ a $\overline{MN}$ délkou tangenty a normály, jich průměty $\overline{PT}$ a $\overline{PN}$ na ose x délkou subtangenty a subnormály.

Vzhledem k tomu, že směrnice tečny jest $\frac{dy}{dx}$ čili y', t. j.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx},$$

obdržíme z trojúhelníků MPT a MPN:

$$\text{subtangenta} = \overline{PT} = y\operatorname{cotg}\alpha = y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{y'},$$

$$\text{subnormála} = \overline{PN} = y\operatorname{tg}\alpha = y\frac{dy}{dx} = yy',$$

$$\text{tangenta} = \overline{MT} = \sqrt{y^2 + y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2},$$

$$\text{normála} = \overline{MN} = \sqrt{y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

První výrazy pro tangentu a normálu možno bráti vždy kladně; výrazy pro subtangentu a subnormálu jsou kladné, resp. záporné, souhlasně s okolností, že y a y' mají totéž znamení neb ne. Zde budiž zároveň připomenuto, že $y' = \operatorname{tg} \alpha$ jest při ostrém úhlu α kladné, a při tupém záporné, souhlasně s tím, že s rostoucím x pořadnice y stoupá neb klesá (čl. 68.).

N. p. u *paraboly* $y^2 = 2px$ máme

$$2y\,dy = 2p\,dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

a rovnice tečny jest

$$Y - y = \frac{p}{y}(X - x) \text{ čili } yY = pX + y^2 - px = p(X + x),$$

a rovnice normály $Y - y = -\frac{y}{p}(X - x)$.

Pro subtangentu $y\frac{dx}{dy}$ nalézáme $y\frac{y}{p}$ t. j. $2x$, tedy dvojnásobnou úsečku bodu dotyčného, a pro subnormálu $y\frac{p}{y} = p$, t. j subnormála jest stálá a rovna parametru.

U *ellipsy*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

máme

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

a tedy rovnice tečny

$$Y - y = -\frac{b^2x}{a^2y}(X - x).$$

Také zde, jako při každé kuželosečce, možno dáti rovnici tečny takový tvar, že jest vzhledem k souřadnicím x, y dotyčného bodu lineární; stačí ji psáti

$$a^2yY + b^2xX = a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

aneb

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1.$$

Zcela obdobně bychom nalezli při *hyperbole*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rovnici tečny

$$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1.$$

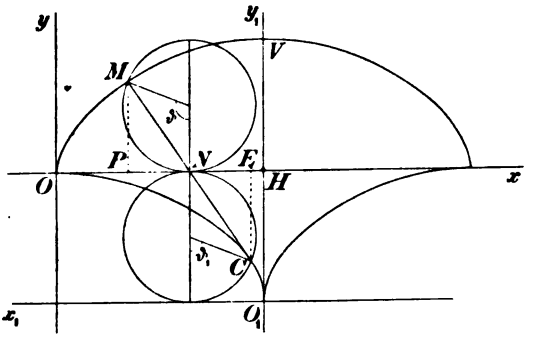
Stanovme ještě *tečnu a normálu cykloidy*; čáru tu opisuje bod O kružnice (obr. 28.), valí-li se tato bez šinutí po své tečně Ox. Dospěje-li kružnice do polohy v obrazci vyznačené a bod O do polohy M, jest MN kruhový oblouk, který se applikoval na přímku ON, a poněvadž se děje valení bez všeho šinutí, máme

$$\text{arc MN} = \overline{\text{ON}},$$

čili

$$a\vartheta = \overline{\text{ON}},$$

značí-li a poloměr kružnice a ϑ úhel valení MSN, kde S značí střed narýsované kružnice.



Obr. 28.

Volme bod O za počátek, přímku Ox za osu úseček pravoúhlých souřadnic x. y. Pro souřadnice bodu M pak nalézáme

$$x = \overline{\text{OP}} = \overline{\text{ON}} - \overline{\text{PN}} = a\vartheta - a \sin\vartheta,$$
$$y = \overline{\text{MP}} = \overline{\text{SN}} + \overline{\text{SD}} = a - a\cos\vartheta;$$

mění-li se ϑ od 0 do 2π, podávají rovnice ty všecky body, do nichž dospěje bod O při jednom odvalení kružnice, t. j. všecky body jedné větve cykloidy. Roste-li ϑ od 2π do 4π, pak do 6π, atd., podávají body druhé, třetí, atd. větve cykloidy; vzhledem k periodě 2π funkcí $\sin\vartheta$ a $\cos\vartheta$ jsou všecky tyto větve shodny, a vznikají z první pošinutím ve směru osy Ox o délky $2\pi a$, $4\pi a$, a t. d.

Největší pořadnici $y = \overline{\text{HV}}$ patrně obdržíme při nejmenší hodnotě $\cos\vartheta = -1$, tedy při $\vartheta = \pi$; tato největší pořadnice $\overline{\text{HV}} = 2a$ jest osou symmetrie pro cykloidu. Je-li totiž $0 < \vartheta < \pi$ a příslušný bod cykloidy (x, y), jest pro $\vartheta_1 = 2\pi - \vartheta$ příslušný bod $x_1 = a(2\pi - \vartheta) + a\sin\vartheta$, $y_1 = a - a\cos\vartheta$, a tedy máme $\frac{x + x_1}{2} = \pi a = \overline{\text{OH}}$, $y = y_1$, jak bylo tvrzeno.

Tečnu i normálu cykloidy v bodě M snadno sestrojíme na

základě výroku, že normála prochází bodem dotyčným N příslušné polohy kružnice s osou Ox. Máme totiž

$$dx = (a - a\cos\vartheta)\,d\vartheta, \quad dy = a\sin\vartheta\,d\vartheta,$$

a tedy rovnici normály

$$Y - y = -\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}(X - x).$$

Pro průsečný bod její s osou Ox máme $Y = 0$, a tedy pro jeho úsečku X:

$$X = x + \frac{y\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta}$$

$$= a\vartheta - a\sin\vartheta + \frac{(a - a\cos\vartheta)\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta} = a\vartheta,$$

t. j. úsečka $X = \overline{ON}$, jak bylo dokázati.

120. **Asymptoty.**

Zabíhá-li čára do nekonečna, zveme asymptotou její takovou přímku, že vzdálenost bodu čáry od ní má za limitu nullu pro případ, že se bod na čáře vzdaluje do nekonečna.

Supponujme nejprve, že asymptota není rovnoběžna s osou Oy, že tedy její směrnice g jest konečná, a pišme její rovnici ve tvaru

$$Y = gX + h,$$

kde také h jest konečné, jelikož asymptotu předpokládáme v konečnu.

Značíme-li δ vzdálenost bodu x, y dané čáry od této přímky, jest

$$\delta = \frac{y - gx - h}{\sqrt{1+g^2}},$$

a tedy přímka asymptotou, platí-li $\lim \delta = 0$ pro $\lim x = \pm\infty$, t. j.

$$\lim_{x=\pm\infty}(y - gx - h) = 0,$$

což můžeme i psáti

$$y - gx - h = \varepsilon, \quad \lim_{x=\pm\infty}\varepsilon = 0.$$

Odtud

$$y - gx = h + \varepsilon, \quad \frac{y}{x} - g = \frac{h+\varepsilon}{x};$$

limita pravé strany jest 0 pro $x = \pm \infty$, a tedy

$$g = \lim_{x = \pm \infty} \frac{y}{x}$$

podává směrnici g asymptoty; nyní z $h = y - gx - \varepsilon$ soudíme, že

$$h = \lim_{x = \pm \infty} (y - gx).$$

Jsou-li tedy $\lim \frac{y}{x}$ a $\lim (y - gx)$, kde g značí předchozí limitu. určité a konečné pro $\lim x = \pm \infty$, jest $Y = gX + h$ asymptotou čáry.

Jde ještě o stanovení asymptot rovnoběžných s osou pořadnic. Je-li $X = a$ rovnice takové asymptoty. jest $x - a$ vzdálenost bodu (x, y) čáry od ní. a musí tedy $\lim (x - a) = 0$, t. j. $\lim x = a$ pro případ, že bod se vzdaluje na čáře do nekonečna, t. j. pro případ, že $\lim y = \pm \infty$, a naopak.

Souvislost pojmu asymptoty s pojmem tečny ukazuje věta:

Existuje-li limitní poloha tečny pro případ, že se bod dotyčný vzdaluje do nekonečna jest tato limitní poloha asymptotou čáry.

Rovnice tečny v bodě (x, y) jest

$$Y - y = y'(X - x) \text{ čili } Y = y'X + y - xy'.$$

Supponujme, že se bod (x, y) na čáře vzdaluje do nekonečna a že současně se tečna blíží určité limitní poloze, o níž možno předpokládati, že není rovnoběžná s osou x nebo y, a jejíž rovnici tedy možno psáti ve tvaru

$$Y = gX + h, \quad g \gtrless 0;$$

v případě rovnoběžnosti této limitní polohy s osou by stačilo otočiti osy souřadné o libovolný úhel a k novým osám transformovati rovnici čáry. Učiněná supposice jest totožná se supposicí, že pro bod na čáře platí při $\lim x = \pm \infty$ také $\lim y = \pm \infty$, a

$$\lim y' = g, \quad \lim (y - xy') = h.$$

Avšak dle čl. 102. jest $\lim \frac{y}{x}$ týž jako $\lim \frac{y'}{1}$ a tedy $g = \lim \frac{y}{x}$; dále možno psáti

$$h = \lim_{x = \pm \infty} (y - xy') = \lim \frac{\frac{y - xy'}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{g - \frac{y}{x}}{-\frac{1}{x}} = \lim \frac{gx - y}{-1},$$

ovšem za té supposice, že limita výrazu $\frac{g - \frac{y}{x}}{-\frac{1}{x}}$, který pro $x = \pm \infty$ nabývá neurčitého tvaru $\frac{0}{0}$, jest táž, jako limita podílu z derivací čítatele a jmenovatele, k čemuž stačí, aby v $\frac{g - zy}{-z}$, kde $z = \frac{1}{x}$, čítatel pro $z = 0$ měl určitou a konečnou derivaci (čl. 101.). Z rovnic právě odvozených

$$g = \lim \frac{y}{x}, \quad h = \lim (y - gx)$$

pak soudíme, že limitní poloha tečny jest skutečně asymptotou. Opak ovšem neplatí, t. j. čára může míti asymptotu, aniž by tato byla limitní polohou tečny.

N. p. při *hyperbole*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

máme

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{y^2}{x^2} = b^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}\right)$$

a pro $\lim x = \pm \infty$, $\lim \frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2}$ a tedy $\lim \frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}$, t. j.

$$g = \pm \frac{b}{a}.$$

Nyní při horním znamení máme

$$h = \lim (y - gx) = \lim \left(y - \frac{b}{a}x\right) = \lim \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right)$$

$$= \frac{b}{a} \lim (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \frac{b}{a} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0,$$

a týž výsledek obdržíme při $g = -\frac{b}{a}$. — Nalézáme tedy dvě asymptoty:

$$Y = \pm \frac{b}{a} X.$$

Asymptoty ty se jeví jakožto limitní polohy tečny

$$Y - y = \frac{b^2 x}{a^2 y}(X - x) \text{ čili } Y = \frac{b^2 x}{a^2 y} X + y - \frac{b^2 x}{a^2 y} x;$$

máme totiž

$$\lim \frac{b^2x}{a^2y} = \frac{b^2}{a^2} \lim \frac{x}{y} = \pm \frac{b}{a},$$

$$\lim \left(y - \frac{b^2x}{a^2y}\, x\right) = \lim \frac{a^2y^2 - b^2x^2}{a^2y} = \lim \frac{-a^2b^2}{a^2y} = 0.$$

N. p. při *hyperbole*

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 6x - 10y - 5 = 0$$

máme, dělíce x^2,

$$3 - 10\frac{y}{x} + 3\frac{y^2}{x^2} + \frac{6}{x} - 10\frac{y}{x}\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} = 0,$$

a tedy pro $\lim x = \pm \infty$,

$$3 - 10g + 3g^2 = 0,$$

a řešením $g_1 = 3$, $g_2 = \frac{1}{3}$.

Vzhledem k totožnosti

$$3 - 10g + 3g^2 = 3(g - 3)\left(g - \frac{1}{3}\right)$$

možno rovnici čáry psáti

$$3x^2\left(\frac{y}{x} - 3\right)\left(\frac{y}{x} - \frac{1}{3}\right) + 6x - 10y - 5 = 0$$

čili

$$3(y - 3x)\left(y - \frac{x}{3}\right) = 5 + 10y - 6x,$$

a tedy máme

$$h_1 = \lim_{x = \infty}(y - g_1x) = \lim (y - 3x) = \lim \frac{5 + 10y - 6x}{3\left(y - \frac{x}{3}\right)}$$

$$= \lim \frac{\frac{5}{x} + 10\frac{y}{x} - 6}{3\left(\frac{y}{x} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{10 \cdot 3 - 6}{3\left(3 - \frac{1}{3}\right)} = 3,$$

a obdobně nalezneme $h_2 = \lim\left(y - \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Čára má tedy dvě asymptoty:

$$Y = 3X + 3, \quad Y = \frac{X}{3} + \frac{1}{3},$$

které jsou opět limitní polohy tečny.

N. p. při *čáře o rovnici*

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

nalezneme sice asymptotu, ale ta není limitní polohou tečny.

Vzhledem k $\frac{\sin -x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ soudíme, že čára jest souměrná k ose Oy; stačí tedy, uvažujeme-li jen kladné hodnoty x.

Pro $\lim x = \infty$ jest $\lim y = 0$, a tedy osa Ox asymptotou čáry.

Tečna má rovnici

$$Y - y = \left(-\frac{\sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x}\right)(X - x);$$

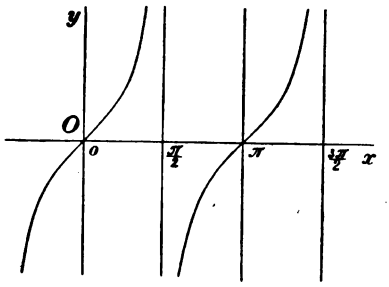
směrnice její $-\frac{\sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x}$ má pro $x = \infty$ limitu 0, kdežto její úsek na ose Oy:

$$y - x\left(-\frac{\sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x}\right) \text{ čili } \frac{2 \sin x}{x} - \cos x$$

patrně nemá žádné limity pro $x = \infty$. Nemá tedy tečna limitní polohy.

V tomto příkladě jest $g = 0$, a $g - \frac{y}{x} = -\frac{y}{x} = -zy$ $= -z^2 \sin \frac{1}{z}$ nemá pro $z = 0$ určité derivace, tak že úvaha dokazující totožnost asymptoty s limitní polohou tečny odpadá.

Čára n. p. $y = \operatorname{tg} x$ (obr. 11.) má stejné pořadnice pro úsečky x a $x + \pi$, stačí tedy omeziti x na intervall $(0 \ldots \pi)$.



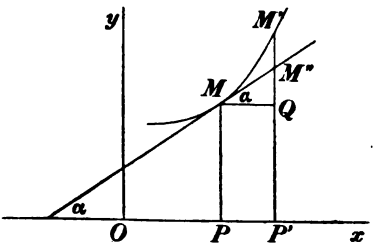
Obr. 11.

Roste-li x od 0 do $\frac{\pi}{2}$, roste y od 0 do $+\infty$, a roste-li x od $\frac{\pi}{2}$ do π, roste y od $-\infty$ do 0; obě větve tak vznikající mají přímku $x = \frac{\pi}{2}$, rovnoběžnou s osou Oy, za asymptotu, neboť $\lim\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ má za následek $\lim y = \pm\infty$.

121. O styku tečny s čarou.

Budiž dána čára rovnicí mezi pravoúhlými souřadnicemi $y = f(x)$ a sestrojme k ní tečnu v bodě $M(x, y)$ (obr. 12.). Uvažujeme-li sousední bod čáry $M'(x + h, y + \Delta y)$, a sousední bod tečny M'' příslušný téže úsečce $x + h$, jest rozdíl $\overline{M''M'}$ souřadnice čáry a souřadnice tečny

$$\begin{aligned}\delta &= \overline{M''M'} = \overline{P'M'} - \overline{P'M''} \\ &= f(x + h) - (f(x) + h \operatorname{tg} \alpha) \\ &= f(x + h) - (f(x) + hf'(x)).\end{aligned}$$



Obr. 12.

Má-li $f(x)$ v místě x určité, konečné derivace až včetně do n-té, možno užiti formule Taylorovy

$$\begin{aligned}f(x + h) &= f(x) + f'(x)h \\ &+ f''(x)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + \cdot\cdot \\ &+ f^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}} + R_n,\end{aligned}$$

kde

$$R_n = f^{(n)}(x + \vartheta h)\frac{h^n}{\underline{|n}}, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

čímž

$$\delta = f''(x)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + \cdot\cdot + f^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}} + R_n.$$

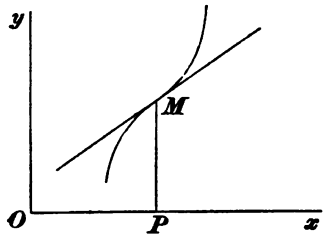
Jest-li $f''(x) \gtrless 0$, pišme

$$\delta = f''(x)\frac{h^2}{2} + R_3;$$

dle čl. 72. jest pro dosti malé $|h|$ první sčítanec číselně větší než R_3 a tedy δ pro kladné i záporné h téhož znamení jako $f''(x)$, t. j. při $f''(x) > 0$ jest čára po obou stranách bodu M nad tečnou, při $f''(x) < 0$ pod tečnou, neb jinak řečeno: *při* $f''(x) > 0$ *jest čára dolů konvexní č. vypouklá, při* $f''(x) < 0$ *jest dolů konkávní č. vydutá*, při čemž směr Oy jest vzat za směr nahoru.

Jest-li však $f'(x) = 0$, ale $f'''(x) \gtrless 0$, pišme

$$\delta = f'''(x)\frac{h^3}{6} + R_4;$$



Obr. 13.

pro dosti malé $|h|$ rozhoduje opět první sčítanec o znamení součtu, a poněvadž on své znamení mění zároveň s h, vidíme, že čára jest po jedné straně bodu M nad tečnou a po druhé pod tečnou, přechází tedy v bodě M s jedné strany tečny na druhou. Takový bod M sluje *inflekčním* č. *bodem obratu* (obr. 13.), a jeho tečna tečnou inflekční č. tečnou obratu; čára jest po jedné straně bodu obratu dolů vypouklá, po druhé vydutá. Při $f'''(x) > 0$ jest δ současně s h kladné neb záporné, t. j. po levé straně bodu M probíhá pod, po pravé nad tečnou, jinak řečeno: po levé straně bodu M jest dolů vydutá, po pravé vypouklá; při $f'''(x) < 0$ se věci mají naopak.

Předpokládejme obecně, že pro úsečku x bodu M platí

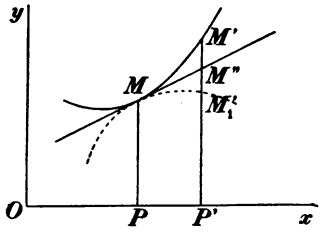
$$f''(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \ldots, \quad f^{(n-1)}(x) = 0, \quad f^{(n)}(x) \gtrless 0;$$

pak

$$\delta = f^{(n)}(x)\frac{h^n}{\underline{n}} + R_{n+1}$$

ukazuje, že pro dosti malé $|h|$ jest δ téhož znamení jako první sčítanec.

Při sudém n má tedy δ stálé znamení, nechť jest $h > 0$ neb < 0, a sice totéž jako $f^{(n)}(x)$; při $f^{(n)}(x) > 0$ jest tedy čára v bodě M dolů vypouklá, při $f^{(n)}(x) < 0$ vydutá (obr. 14.).



Obr. 14.

Při lichém n jest bod M bodem inflekčním (obr. 13.); mění totiž δ své znamení současně s h, a jest při $f^{(n)}(x) > 0$ čára v levo od M dolů vydutá, v pravo vypouklá, při $f^{(n)}(x) < 0$ v levo od M dolů vypouklá a v pravo vydutá.

Nechť jest $f^{(n)}(x) > 0$ neb < 0, vždy pravíme, že má tečna s čarou styk n—1-ho stupně v bodě M; rozdíl δ pořadnic čáry a tečny jest totiž nekonečně malá hodnota stupně n, béřeme-li h za ne-

konečně malou hodnotu prvního stupně, jakož jest patrné z rovnosti

$$\lim_{h=0} \frac{\delta}{h^n} = \frac{f^{(n)}(x)}{\underline{|n}}.$$

V případě nejčastějším, kdy $f''(x) \gtrless 0$, jest $n = 2$, a tečna má s čarou styk prvního stupně.

Má-li čára s tečnou styk lichého stupně, t. j. je-li n sudé, probíhá v sousedství bodu M po jedné straně tečny, má-li však styk sudého stupně, jest bod M bodem inflekčním.

Přihlížíme-li jen k bodům, v nichž existují spojité derivace funkce $f(x)$, jsou body inflekční jen mezi těmi, jichž úsečky činí $f''(x) = 0$; je-li v takovém bodě styk tečny s čarou stupně sudého, jest bodem inflekčním, jinak není.

Úvahy tohoto článku objasňují pravidlo odvozené v čl. 112. pro stanovení maxim a minim funkce $y = f(x)$. Maximum neb minimum jest pořadnice y v jistém okolí největší, resp. nejmenší; v příslušném bodě čáry jest tečna rovnoběžná s osou Ox, tedy její směrnice 0, t. j. $f'(x) = 0$; pro maximum pořadnice jest čára pod, a pro minimum nad tečnou, t. j. $f''(x)$ jest < 0, resp. > 0, aneb obecněji čára má s tečnou styk stupně lichého $n-1$ a jest dolů vydutá, resp. vypouklá, t. j. $f^{(n)}(x)$ jest < 0, resp. > 0.

122. **Průběh čáry v rovině.**

Průběh čili tvar čáry $y = f(x)$ dosti objasníme, zjistíme-li, v kterých částech stoupá, v kterých klesá, v kterých obrací dolů stranu vypouklou, v kterých vydutou, kde se vyskytují body inflekční, kde body v sousedství nejvyšší neb nejnižší, t. j. v nichž jest y maximem, resp. minimem, což vše dle předchozích úvah se provede, jakož následující příklady ukazují.

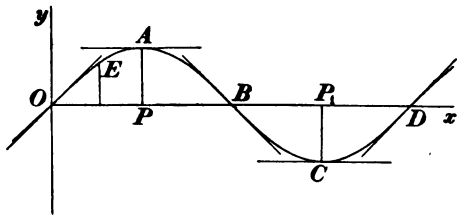
1. U křivky dané rovnicí

$$y = \sin x$$

čili u t. z. sinusoidy stačí vzhledem k $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ omeziti x na intervall $(0 \ldots 2\pi)$.

Od $x = 0$ do $x = \frac{\pi}{2}$ roste y od 0 do 1, a od $x = \frac{\pi}{2}$ do $x = \pi$ klesá y od 1 do 0; mění-li se x od π do $\frac{3\pi}{2}$, klesá y od 0 do -1, a roste-li y dále od $\frac{3\pi}{2}$ do 2π, stoupá y od -1 do 0

(obr. 15.). Totéž ukazuje první derivace $\frac{dy}{dx} = \cos x$, která jest



Obr. 15.

v intervallu $\left(0 \,..\, \frac{\pi}{2}\right)$ kladná, tedy y stoupající, od $\frac{\pi}{2}$ do π záporná, tedy y klesající atd.

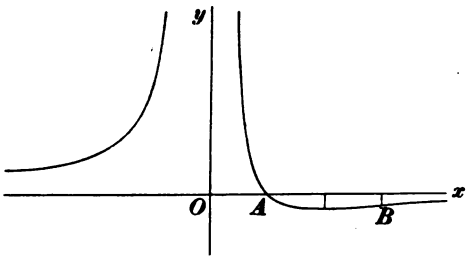
Druhá derivace $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$ jest v intervallu $(0 \,..\, \pi)$ záporná, t. j. čára dolů vydutá, a v intervallu $(\pi \,..\, 2\pi)$ kladná, t. j. čára dolů vypouklá. Pro $x = 0$ jest $y'' = 0$, $y''' = \underset{0}{/} -\cos x = -1$, tedy počátek O bodem inflekčním, a totéž platí o bodu $x = \pi$, $y = 0$. Tečna inflekční v bodě O má směrnici $\underset{x=0}{/} \frac{dy}{dx} = 1$, tedy tvoří úhel $\frac{\pi}{4}$ s kladnou osou x; v bodě $x = \pi$, $y = 0$ nalézáme $\frac{dy}{dx} = -1$, tedy sklon tečny v bodě tom jest $\pi - \frac{\pi}{4}$.

Maximum neb minimum pořadnice y může vzniknouti v bodě, v němž $\frac{dy}{dx} = 0$, t. j. $\cos x = 0$, t. j. pro $x = \frac{\pi}{2}$ neb $x = \frac{3x}{2}$; v prvnějším jest $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$, tedy y maximem, v druhém jest $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1$, tedy y minimem.

2. Daná čára měj rovnici

$$y = -\frac{1-x}{x^2}.$$

Každému x přísluší konečné y, vyjma $x = 0$, pro něž $y = \infty$, t. j. $\lim_{x=0} y = \infty$; jest tedy osa Oy asymptotou čáry (obr. 16.). Pro $\lim x = \pm\infty$ jest $\lim y = 0$, t. j. jak kladná, tak záporná osa x jest asymptotou čáry.



Obr. 16.

Pořadnice y jest kladná či čára nad osou x, je-li x v intervallu $(-\infty \,..\, 1)$, a

záporná při $x > 1$, pro $x = 1$ jest $y = 0$, čímž máme průsečík A čáry s osou x.

První a druhá derivace pořadnice jsou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-2}{x^3}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6-2x}{x^4}.$$

Při $x < 0$ jest $y' > 0$, t. j. čára stoupá, zároveň jest $y'' > 0$, t. j. čára jest dolů konvexní. Jest-li x kladné, tu $y' < 0$ při $0 < x < 2$, t. j. v intervallu $(0 \ldots 2)$ čára klesá; pro $x = 2$ jest $y = -\frac{1}{4}$ minimem, jelikož tu $y' = 0$, $y'' = \frac{1}{8} > 0$; při $x > 2$ jest $y' > 0$, a čára tedy v intervallu $(2 \ldots \infty)$ stoupá od $y = -\frac{1}{4}$ do $y = 0$.

Při kladném x jest $y'' > 0$ v intervallu $(0 \ldots 3)$, a $y'' < 0$ v intervallu $(3 \ldots \infty)$; v prvním intervallu jest čára dolů vypouklá, v druhém vydutá, a v bodě $B(x = 3, y = -\frac{2}{9})$ jest inflexe, a ovšem $y'' = 0$; tečnu inflekční snadno sestrojíme, znajíce její směrnici $y' = \frac{1}{27}$.

3. *Řetězovka* jest čára o rovnici v souřadnicích pravoúhlých

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

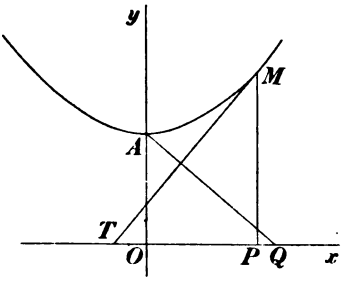
v níž $a = \overline{OA}$ (obr. 17.) značí kladnou stálou. Pro $x = 0$ jest $y = a$, a tedy A bodem čáry, a pro každé x jest patrně y kladné.

Poněvadž úsečce $-x$ přísluší totéž y jako úsečce x, jest řetězovka vzhledem k ose Oy symmetrická a omezíme se tedy na onu část čáry, která přísluší kladným x.

První dvě derivace pořadnice dle úsečky jsou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$



Obr. 17.

Při kladném x jest $e^{\frac{x}{a}} > 1$, $e^{-\frac{x}{a}} < 1$ a tedy y' i y'' kladné, t. j. čára v intervallu $(0 \ldots \infty)$ stoupá a s. od $y = a$ do $y = \infty$, obracejíc dolů svoji vypouklou stranu. V bodě A jest $y' = 0$, tedy tečna rovnoběžná s osou x, a pořadnice $y = a$ minimem vzhledem k $y'' = \frac{1}{a} > 0$.

Čára nemá asymptot, neboť $\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = \infty$ (čl. 102.), a tedy by asymptota musila býti rovnoběžna s osou y; taková asymptota ale neexistuje, poněvadž $\lim x = \infty$ při $\lim y = \infty$.

Tečnu řetězovky v bodě M sestrojíme, učiníme-li $\overline{AQ} = \overline{MP}$ a vedeme-li přímku MT kolmo k AQ; pak jest MT tečnou.

Jest totiž směrnice této přímky $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}$ rovna $\frac{dy}{dx}$; skutečně máme, učinivše za příčinou stručnosti $e^{\frac{x}{a}} = \mu$,

$$y = \frac{a}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right), \quad y' = \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right),$$

a tedy, jelikož první rovnice řešením dle μ podává

$$\mu = \frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a},$$

kde vzhledem k $\mu > \frac{1}{\mu}$ a tedy $\mu > \frac{y}{a}$ vzat kořen kladně,

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a} - \frac{a}{y + \sqrt{y^2 - a^2}}\right) = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}.$$

123. Vícenásobné body čáry.

Jest-li na čáře $y = f(x)$ vytčen bod $M(x, y)$, a jest-li $f(x)$ i $f'(x)$ spojitá v místě x, tu prochází bodem spojitá část čáry mající v M určitou tečnu, která v okolí tohoto bodu mění též spojitě svojí polohu; bod M jest *obyčejným bodem* čáry; mají-li se věci jinak, sluje *zvláštním* č. *singulárným*. Nechtíce se pouštěti do obecné theorie bodů singulárných, vytkněme z nich jen body vícenásobné č. takové, jimiž prochází několik větví čáry.

Dána-li čára rovnicí

$$f(x, y) = 0,$$

jest směrnice tečny v bodě (x, y)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}}.$$

Směrnice ta se stává neurčitou $\frac{0}{0}$, platí-li v nějakém bodě čáry současně

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0;$$

pravá hodnota y' hoví dle čl. 101. rovnici

$$y' = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y'}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'},$$

t. j.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

z níž obdržíme pro směrnici dvě hodnoty

$$y' = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}.$$

Jest-li výraz pod znamením odmocniny kladný, má čára v bodě (x, y) dvě tečny a bod sluje dvojným, je-li výraz ten nullou, má čára dvě splývající tečny a bod sluje bodem vratu (point de rebroussement, Rückkehrpunkt), je-li konečně výraz ten záporný, nemá čára v bodě (x, y) reálné tečny a bod sluje isolovaným č. osamělým.

Téhož výsledku dojdeme, derivujeme-li rovnici čáry dvakrát podle x, čímž

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0;$$

v případě, kdy souřadnice bodu čáry annullují $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, jest první rovnice totožností a směrnice y' plyne z druhé, která se patrně redukuje na rovnici (1). Annulluje-li x, y také druhé derivace funkce f, t. j. činí-li současně

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

jest i tato druhá rovnice totožností a užijme tedy rovnice, která plyne dalším derivováním dle x:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} y' + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} y'^3 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y'' + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' y'' + \frac{\partial f}{\partial y} y''' = 0.$$

Za učiněných supposic se tato rovnice redukuje na

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} y' + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} y'^3 = 0, \tag{2}$$

a podává tři hodnoty y', které — jsou-li reálné — stanoví tři tečny v bodě (x, y), jenž sluje bodem trojnásobným. A podobně možno pokračovati a zjistiti, že v bodě čáry (x, y), jehož souřadnice annullují $f(x, y)$ se všemi parciálnými derivacemi až včetně řádu n—1, má y' obecně n hodnot stanovených rovnicí n-ho stupně

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + n\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} y' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} y'^2 + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} y'^n = 0;$$

bod takový sluje ovšem n-násobným.

Jakožto první příklad uvažujme čáru

$$f(x, y) = (x - a)^2 (x - b) - y^2 = 0,$$

kde nejprve supponujme $a > b > 0$; její vícenásobné body ustanovíme.

Aby první derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - a)(x - b) + (x - a)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

vymizely, musí především $y = 0$, které hodnotě na čáře korrespondují hodnoty $x = a$, $x = b$, z nichž jen první annulluje $\frac{\partial f}{\partial x}$. Nalézáme tedy jediný vícenásobný bod $(a, 0)$. Poněvadž pro něj

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(a - b), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2,$$

jest rovnice (1)

$$2(a - b) - 2y'^2 = 0, \quad y' = \pm\sqrt{a - b};$$

bod $(a, 0)$ jest tedy dvojným bodem o dvou reálných tečnách, k ose x symmetricky položených.

Píšeme-li rovnici čáry ve tvaru, v němž odmocnina jest dvojznačná,

(3) $$y = (x - a)\sqrt{x - b},$$

stanovíme snadno její tvar a potvrdíme odvozený výsledek.

Aby y bylo reálné, nutno předpokládati $x \geqq b$, a pak ku každému x náleží dvě pořadnice y. číselně stejné ale opáčných znamení, t. j. čára má osu symmetrie Ox. Derivováním obdržíme

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x - b} + \frac{x - a}{2\sqrt{x - b}},$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{x - b}}\left[1 - \frac{x - a}{4(x - b)}\right].$$

Jest-li x v intervallu $(b \,..\, a)$, nutno vzíti v (3) odmocninu se záporným znamením, aby vyšlo kladné y, odpovídající hořejší části čáry, t. j. nad osou x položené; pak ale y'' jest záporné, t. j. čára dolů vydutá, a první derivace, vyznačujíce znamení odmocniny,

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{x - b} + \frac{x - a}{-2\sqrt{x - b}} = \frac{a + 2b - 3x}{2\sqrt{x - b}}$$

jest $\gtrless 0$ souhlasně s $x \gtrless \frac{a + 2b}{3}$, a vymizí při $x = \frac{a + 2b}{3}$.

Čára tedy od $x = b$ do $x = \frac{a + 2b}{3}$ stoupá a odtud do $x = a$ klesá, majíc na těchto třech místech pořadnice $y = 0$, $y_{max} = \frac{2(a - b)\sqrt{a - b}}{3\sqrt{3}}$, $y = 0$, a v bodě $(a, 0)$ tečnu o záporné směrnici $y' = -\sqrt{a - b}$.

Roste-li x od a do ∞ a mění-li se oba faktory v (3) spojitě, přijdeme do dolejší větve čáry, jejíž souřadnice y jsou tedy opět dány výrazem (3), béřeme-li v něm odmocninu záporně; vzhledem k $3x > a + 2b$ jest pak y' stále záporné a také

$$y'' = \frac{1}{-\sqrt{x - b}}\left[1 - \frac{x - b}{4(x - b)}\right]$$

patrně stále záporné, t. j. dolejší čára v intervallu $(a \,..\, \infty)$ stále klesá, jsouc dolů konkávní, až do $y = -\infty$.

Přimyslíme-li si k větvi, jejíž průběh jsme studovali, větev

vzhledem k ose x symmetrickou, vidíme, že bodem $(a, 0)$ procházejí dvě větve čáry, že to tedy bod dvojný.

Supponujeme-li za druhé $a = b$, máme rovnici čáry

$$f(x, y) = (x - a)^3 - y^2 = 0,$$

a opět vymizí f i s prvními svými parciálnými derivacemi pro $x = a$, $y = 0$; v bodě tom nalezneme $f''_{xx} = 0$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = -2$, tak že rovnice (1) tu zní $-2y'^2 = 0$, majíc dvojnásobný kořen $y' = 0$. Bod $(a, 0)$ jest tedy bodem vratu a osa x jest tečna v něm. Totéž ukazuje rovnice čáry psaná ve tvaru

$$y = (x - a)^{3/2} = (x - a)\sqrt{x - a},$$

kde pravá strana jest opět dvojznačná; x musí býti v intervallu $(a \ldots \infty)$, má-li y býti reálné, a pak jsou obě hodnoty y číselně stejné a různých znamení. Pro $x = a$ splývají obě hodnoty y s 0, a směrnice tečny $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x - a}$ pro obě větve jest též 0; dotýká se tedy horní i dolní větev v bodě $(a, 0)$ osy x, z čehož patrno, že to bod vratu. Poněvadž při $x > a$ jest pro horní větev stále $y' > 0$, tedy tato stoupá v intervallu $(a \ldots \infty)$ až do $y = \infty$, a vzhledem k $y'' = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x - a}} > 0$ obrací svoji vypouklou stranu dolů.

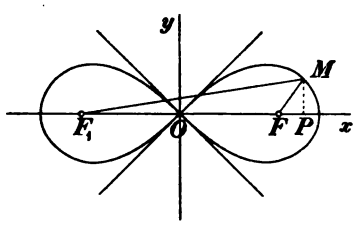
Supponujme konečně $0 < a < b$; pak má čára

$$f(x, y) = (x - a)^2 (x - b) - y^2 = 0$$

v bodě $(a, 0)$ dvojný bod isolovaný. V něm totiž opět vymizí f se svými prvními derivacemi a rovnice (1) jest pak opět $2(a - b) - 2y'^2 = 0$ a má imaginárné kořeny $y' = \pm\sqrt{a - b}$.

To ukazuje také rovnice psaná ve tvaru $y = (x - a)\sqrt{x - b}$: jest totiž $x = a$ jediná hodnota menší než b podávající reálné $y = 0$, ostatní reálné body čáry mají úsečky $x \geqq b$.

Jakožto druhý příklad uveďme lemniskatu, speciálnou to čáru *Cassini-ho*.



Obr. 18.

Křivky Cassini-ho jsou čáry, jichž body mají ode dvou pevných bodů (ohnisek) vzdálenosti o stálém součinu.

Spojnici ohnisek FF_1 (obr. 18.) volme za osu x, bod O uprostřed nich za počátek pravoúhlých souřadnic x, y, a položme $F_1F = 2c$, tak že ohniska jsou body $F(c, 0)$ a $F_1(-c, 0)$.

Jest-li M (x, y) bodem čáry Cassini-ho, pro niž onen stálý součin jest h^2, máme vzhledem k

$$\overline{FM} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad \overline{F_1M} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

rovnici čáry Cassini-ho:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ \sqrt{(y+c)^2 + y^2} = h^2$$

čili

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2\,(y^2 - x^2) + c^4 - h^4 = 0.$$

Každým bodem (x, y) prochází jedna z těchto čar: neboť součin z průvodičů daného bodu stanoví stálou h^2 a tím celou čáru. Do rovnice čáry vcházejí souřadnice jen svými čtverci; hoví-li x, y rovnici, hoví tedy $\pm x$, $\pm y$ také, t. j. obě osy souřadné jsou osami symmetrie a O jest středem čáry.

Nejzajímavější z čar Cassini-ho jest ona, která prochází středem O; sluje lemniskatou. Ježto pro ni platí $\overline{FO} \cdot \overline{F_1O} = h^2$, t. j. $c^2 = h^2$, jest její rovnice

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2\,(y^2 - x^2) = 0.$$

Ukažme, že počátek O jest dvojným bodem jejím.

Derivujeme-li rovnici tu dvakrát dle x, obdržíme

$$(x^2 + y^2)\,(x + yy') + c^2\,(yy' - x) = 0,$$
$$(x^2 + y^2)\,(1 + y'^2 + yy'') + 2\,(x + yy')^2 + c^2\,(y'^2 + yy'' - 1) = 0;$$

učinivše $x = 0$, $y = 0$, přejde první rovnice do totožnosti $0 = 0$, druhá však podává $c^2\,(y'^2 - 1) = 0$, z čehož $y' = \pm 1$. Má tedy lemniskata ve středu O dvě tečny, rozpolující úhly os x a y. Bod O jest na každé z obou větví bodem inflekčním; neboť dalším derivováním nalezneme v bodě O relaci

$$y'y'' = 0, \quad \text{t. j.} \quad \pm y'' = 0, \quad y'' = 0,$$

a ještě dalším derivováním relaci

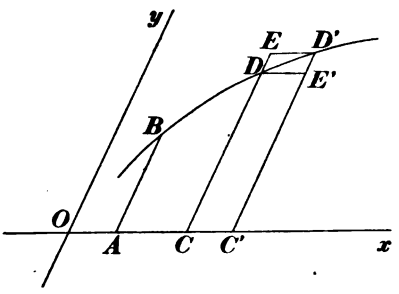
$$4\,(1 + y'^2 + yy'')^2 + c^2\,(3y''^2 + 4y'y''' + yy^{(4)}) = 0,$$

t. j.

$$y''' = \mp \frac{4}{c^2}.$$

124. **Derivace a differenciál plochy.**

Rovnicí $y = f(x)$ budiž dána čára třeba v soustavě kosoúhlých souřadnic x, y. Jest-li $\overline{OA} = a$ pevná hodnota úsečky (obr. 19.), $\overline{OC} = x$ libovolná větší hodnota úsečky, jest zjevno,



Obr. 19.

že plocha u omezená krajními pořadnicemi čáry $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, pak osou úseček $\overline{AC}$ a obloukem BD dané čáry jest jistou funkcí úsečky $x = \overline{OC}$. Jde o derivaci této funkce*).

Předpokládejme za příčinou jednoduchosti, že pořadnice $f(x)$ bodů čáry v oblouku BD jsou kladné a že $f(x)$ třeba stoupá. Učiníme-li pak $CC' = \Delta x$, jest $u + \Delta u$ plocha AC'D'B a Δu plocha CC'D'D; plocha ta jest obsažena mezi rovnoběžníkem CC'E'D a mezi rovnoběžníkem CC'D'E, t. j. klademe-li $\overline{C'D'} = f(x + \Delta x) = y_1$, a značíme-li α úhel os souřadných,

$$y \Delta x \sin \alpha < \Delta u < y_2 \Delta x \sin \alpha,$$

z čehož

$$y \sin \alpha < \frac{\Delta u}{\Delta x} < y_1 \sin \alpha.$$

Předpokládejme funkci $f(x)$ spojitou; pak pro $\lim \Delta x = 0$ jest $\lim f(x + \Delta x) = f(x)$, t. j. $\lim y_1 = y$ a tedy

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = y \sin \alpha,$$

t. j.

$$\frac{du}{dx} = y \sin \alpha, \quad du = y \sin \alpha \, dx.$$

Užíváme-li souřadnic pravoúhlých, jest $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a tedy

$$\frac{du}{dx} = y, \quad du = y \, dx,$$

t. j. *derivace plochy vytknutým způsobem omezené podle úsečky x se rovná poslední pořadnici.*

Věta ta vede k stanovení plochy u, jakož v integrálném počtu blíže poznáme; zde vytkneme jen jeden příklad

Mějme parabolu $x^2 = 2py$ a označme u plochu omezenou touto čarou, osou x a pořadnicemi příslušnými úsečkám 0 a $x > 0$; pak

$$du = y \, dx = \frac{x^2}{2p} dx = d\left(\frac{1}{2p} \frac{x^3}{3}\right).$$

*) Přesně vytkneme pojem plochy u v počtu integrálném.

Funkce u a $\frac{1}{2p}\frac{x^3}{3}$ mají týž differenciál a jest tedy jich rozdíl stálý (čl. 68.); pro $x = 0$ však obě vymizí a tedy jest stálý jich rozdíl 0, t. j. $u = \frac{x^3}{6p} = \frac{1}{3}xy$, jakož jsme již v čl. 59. odvodili a jakož i z elementů známo.

125. **Derivace a differenciál oblouku čáry.**

Pojem délky oblouku BD (obr. 20.) čáry dané rovnici $y = f(x)$ vytkneme následujícím způsobem.

Zvolme na čáře mezi B a D libovolný počet bodů n. p. $n-1$ a spojme každé dva sousední body B, .. M, M', .. D přímkou, čímž vzniká lomená čára o n stranách; *délkou oblouku* BD *nazýváme limitu obvodu této lomené čáry pro případ, že počet n jejích stran roste do* ∞, *a zároveň každá strana má za limitu* 0. Klademe tedy jakožto definici

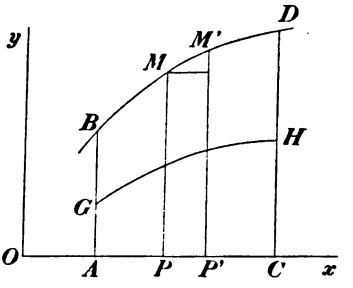
$$\text{arc BD} = \lim_{n=\infty} \Sigma \overline{MM'}.$$

Arci nutno dokázati, že tato limita jest určitou hodnotou, nezávislou na způsobu, jakým se volí ony body na oblouku BD, roste-li jen jejich počet do nekonečna a má-li současně vzdálenost každých dvou sousedních 0 za limitu.

Jsou-li x, y souřadnice bodu M, a $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ souřadnice bodu M', jest

$$\overline{MM'} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$= \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$



Obr. 20.

Pro $\lim n = \infty$ předpokládáme arci $\lim \Delta x = 0$, a vzhledem k spojitosti funkce $f(x)$ jest také $\lim \Delta y = 0$; za další supposice, že $f(x)$ má derivaci, jest $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ a tedy

$$\lim \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Máme tedy dle pojmu limity

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \varepsilon, \quad \lim \varepsilon = 0,$$

a tudíž

$$\lim_{n=\infty} \Sigma \overline{MM'} = \lim \Sigma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \Delta x + \lim \Sigma \varepsilon \Delta x.$$

Poněvadž součet $\Sigma \Delta x = \overline{AC}$ jest konečný, máme (čl. 59.)

$$\lim \Sigma \varepsilon \Delta x = 0$$

a tedy

$$\lim \Sigma \overline{MM'} = \lim \Sigma Y \Delta x,$$

položíme-li za příčinou stručnosti $Y = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Dle čl. 59. jest ale $\lim \Sigma Y \Delta x$ roven ploše ACHG, má-li pořadnice pomocné čáry GH délku Y; plocha ta jest určitou hodnotou, nezávislou na volbě přírůstů Δx, jen když při $\lim n = \infty$ platí $\lim \Delta x = 0$.

Pokládáme-li úsečku $\overline{OA}$ za pevnou, úsečku $\overline{AC} = x$ za libovolnou, jest délka oblouku BD, již označíme s, definována $\lim \Sigma \overline{MM'}$ a tento limes se rovná ploše AGHC, mající za derivaci dle x poslední pořadnici CH čili Y, t. j.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Podíl z nekonečně malého oblouku a z jeho tětivy má za limitu 1. Přibude-li oblouku $s = \text{arc BD}$ o Δs, zvětšíme-li $x = \overline{AC}$ o Δx, jest tětiva oblouku Δs patrně $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ a

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 1.$$

Možno tudíž v příčině úkolů vyznačených v čl. 59. nekonečně malý oblouk zaměniti jeho tětivou.

Jest-li čára dána tím způsobem, že obě souřadnice x, y jejího bodu jsou dány jakožto funkce proměnné t, píšeme

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

kdež odmocnině přikládáme znamení $\pm$ souhlasně s $\frac{ds}{dt} \gtrless 0$,

t. j. roste-li, resp. klesá-li oblouk s při rostoucím t. Jest-li n. p. x neodvisle proměnná, píšeme arci

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

Průmět tětivy $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ na osu x, resp. osu y, jest Δx, resp. Δy; značíme-li tedy τ úhel, který svírá s kladnou osou x tětiva směřující od bodu (x, y) k bodu $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ naší čáry, máme, berouce promítanou délku, t. j. $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ kladně,

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \cos \tau, \quad \Delta y = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \sin \tau.$$

Limita úhlu τ pro lim $\Delta x = 0$ jest úhel α, který svírá tečna čáry sestrojená v bodě (x, y) s kladnou osou x; a máme tudíž

$$\cos \alpha = \lim \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

a obdobně

$$\sin \alpha = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

čili stručněji

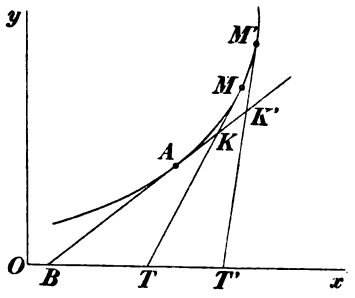
$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds},$$

kde ds jest kladný, avšak dx, dy kladný neb záporný souhlasně se vzrůstem neb klesáním hodnot x, y v uvažovaném směru tečny.

126. **O křivosti čar v rovině.**

Absolutní křivostí oblouku AM (obr. 21.) dané čáry, na němž se nenalézá žádný bod inflekční, nazýváme úhel σ, sevřený tečnami, sestrojenými v koncových bodech oblouku, čili úhel, o nějž se tečna od první polohy odchýlí, zaujme-li posloupně všecky polohy až do tečny v bodě M.

Střední č. průměrnou křivostí oblouku AM zoveme podíl $\frac{\sigma}{s}$ z absolutní jeho křivosti a z jeho délky s = arc AM.



Obr. 21.

Křivostí čáry v bodě M *nazýváme limitu střední křivosti oblouku* MM' *stanovenou pro případ, že bod* M' *má limitní polohu* M. Označíme-li $\sigma + \Delta\sigma$ absolutní křivost oblouku AM', jest patrně $\Delta\sigma$ absolutní křivostí oblouku MM', tedy $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$ jeho průměrnou křivostí, značí-li Δs oblouk MM', a křivost čáry v bodě M jest

$$\lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{d\sigma}{ds}.$$

Pokládáme-li totiž obecně souřadnice x, y bodu M za dané funkce nějaké proměnné t, jsou patrně s i σ funkcemi téže proměnné a tudíž můžeme psáti

$$\lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \lim \frac{\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}} = \frac{\frac{d\sigma}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\sigma}{ds}.$$

Differenciál úhlu σ nazýváme *úhlem kontingenčním dané čáry v bodě* M; označíme-li α úhel sevřený tečnou TM a kladnou osou x, a α_0 úhel tečny BA s touže osou, máme v trojúhelníku BKT patrně $\alpha = \alpha_0 + \sigma$, a tedy $d\alpha = d\sigma$, t. j. *úhel kontingenční jest též differenciál sklonu tečny s kladnou osou úseček, tedy i s libovolnou pevnou přímkou.*

Poslední formule ukazuje, že *křivost jest podíl z kontingenčního úhlu a z differenciálu oblouku čáry.*

U kružnice mají všecky oblouky touž průměrnou křivost, a tedy jest také křivost ve všech bodech táž, neboť je-li R poloměr kružnice, má oblouk náležející k středovému úhlu ϑ délku $R\vartheta$ a absolutní křivost č. sklon tečen v koncových bodech patrně ϑ, tudíž střední křivost $\frac{\vartheta}{R\vartheta}$ čili $\frac{1}{R}$; to jest také křivost kružnice v kterémkoli bodě.

Poloměrem zakřivení R čáry v daném bodě nazýváme poloměr kružnice, jejíž křivost se rovná křivosti čáry v daném bodě; platí tudíž

$$\frac{1}{R} = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}, \quad R = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Z posledního výrazu pro R snadno odvodíme jiný, závislý na pravoúhlých souřadnicích bodu M(x, y). Máme totiž

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx},$$

a differencováním, pokládajíce obecně x, y za funkce nějaké proměnné neodvislé t,

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2},$$

z čehož, vzhledem ku $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$,

$$d\alpha = \frac{dx^2}{ds^2} \frac{dx\, dy^2 - dy\, d^2x}{dx^2},$$

a tedy křivost

$$\frac{1}{R} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{ds^3} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}},$$

a poloměr zakřivení

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}.$$

Volíme-li x za neodvisle proměnnou, máme $d^2x = 0$, a dělíme-li čítatel i jmenovatel dx^3, obdržíme

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

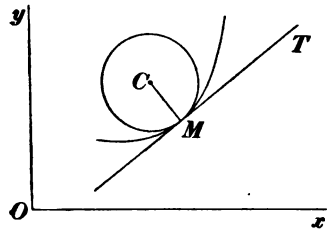
kde, jako obyčejně, y' a y'' značí derivace $\frac{dy}{dx}$ a $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Béřeme-li odmocninu v čítateli kladně, vychází R s týmž znamením jako y'', a tedy vychází R kladně, je-li čára v uvažovaném bodě dolů vypouklá, a záporně, je-li vydutá.

127. **Kružnice zakřivení.**

Kružnicí zakřivení čáry v bodě M nazýváme kružnici, která se dotýká čáry v bodě M majíc touž křivost jako čára v bodě M, a položenou s čarou po téže straně tečny. Střed C této kružnice se zove *středem křivosti* čáry pro bod M (obr. 22.).

Střed křivosti C *jest limitní poloha průsečíků normály v bodě* M *s normálou, sestrojenou v nekonečně blízkém bodě čáry.*



Obr. 22.

Pišme rovnici normály v bodě M (x, y)

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$

ve tvaru

$$X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) = 0 \text{ čili } V = 0,$$

značíce levou stranu stručně V.

Rovnice normály v bodě M′ $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ jest

$$V + \Delta V = 0,$$

značí-li $V + \Delta V$ výraz, do něhož přejde V, nahradíme-li x, y, $\frac{dy}{dx}$ resp. hodnotami $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $\frac{dy}{dx} + \Delta \frac{dy}{dx}$.

Průsečík obou normál hoví oběma posledním rovnicím a tedy také rovnicím

$$V = 0, \quad \Delta V = 0,$$

aneb i

$$V = 0, \quad \frac{\Delta V}{\Delta x} = 0.$$

Limitní polohou tohoto průsečíku jest tedy bod C′ hovící rovnicím

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dx} = 0;$$

avšak

$$\frac{dV}{dx} = -1 - \frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx} + (Y - y)\frac{d^2y}{dx^2},$$

a hoví tedy bod C′ (X, Y) rovnicím

$$X - x + y'(Y - y) = 0,$$
$$-1 - y'^2 + (Y - y)y'' = 0.$$

Řešením jich dle $X - x$ a $Y - y$ obdržíme formule

$$(1) \qquad X - x = -\frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad Y - y = \frac{1 + y'^2}{y''}$$

podávající souřadnice X, Y oné limitní polohy, a z nich vzdálenost

$$\overline{MC'} = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2} = \frac{1 + y'^2}{y''}\sqrt{1 + y'^2} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

t. j.

$$\overline{MC'} = R.$$

Že bod C′ položený na normále bodu M a mající vzdálenost R od M splývá s bodem C, nyní vychází tím, že ukážeme, že přímka $\overline{MC'}$ jest s kružnicí zakřivení, t. j. s danou čarou, po téže straně tečny. To však vychází z druhé rovnice (1), která ukazuje, že rozdíl $Y - y$ má totéž znamení jako y'', a že tedy $Y \gtrless y$ dle toho, je-li čára dolů vypouklá neb vydutá.

Rovnicemi (1) jsou tedy dány souřadnice X, Y středu zakřivení, tak že kružnice zakřivení má rovnici

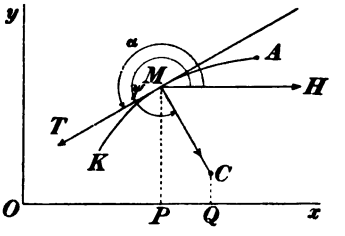
$$(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 = R^2,$$

značíme-li běžné souřadnice její ξ, η.

128. O směru normály a tečny.

Pro mnohé úvahy jest záhodno vytknouti z obou opáčných směrů normály i tečny určitě jeden; u normály křivky AK v bodě M (x, y) vytkněme směr vedoucí od bodu M ku středu zakřivení C (obr. 23.) a ten nazveme *směrem normály.*

Veďme bodem M rovnoběžku MH s kladnou osou x a otočme ji kolem M ve směru rotace šípem naznačené — kterou totiž přechází kladná osa x rotací devadesátistupňovou do kladné osy y — do normály MC; příslušný rotační úhel ψ, jenž jest v mezích 0 a 2π, jest patrně sklon mezi směrem normály právě definovaným a mezi kladnou osou x.



Obr. 23.

V tečně se nalézají též dva směry, z nichž patrně jeden tvoří s kladnou osou x ve smyslu právě vytčeném sklon α takový, že

$$\psi = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

Tento směr nazveme *směrem tečny.* V obrazci jest to směr MT. Dle tohoto sjednání má směr normály k směru tečny vždy touž relativní polohu, jakou má kladná osa y ku kladné ose x.

Po této definici jest α zcela určitý úhel v mezích $-\frac{\pi}{2}$ a $2\pi - \frac{\pi}{2}$ obsažený a formule (čl. 125.)

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}$$

podávají jeho cosinus a sinus, béřeme-li v nich ds kladně a dx, dy se znameními, jež přísluší přemístění bodu M (x, y) na čáře ve směru tečny MT právě definovaném; pevný bod A na čáře, od něhož měříme oblouk $AM = s$, musí býti tedy tak volen, aby vytčeným přemístěním oblouk s rostl.

Značíme-li souřadnice středu zakřivení C opět X, Y, máme nyní, pokládajíce poloměr zakřivení R za kladnou hodnotu,

$$X = x + R\cos\psi = x + R\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = x - R\sin\alpha,$$

$$Y = y + R\sin\psi = y + R\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = y + R\cos\alpha,$$

čili

$$X - x = -R\sin\alpha, \quad Y - y = R\cos\alpha. \tag{2}$$

Differencováním rovnice

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$$

máme, jako v čl. 126.,

$$\frac{dx}{\cos^2\alpha} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2}, \qquad d\alpha = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2 + dy^2};$$

volíme-li x za neodvisle proměnnou, jest tedy

$$d\alpha = \frac{dx\,d^2y}{dx^2 + dy^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \frac{y''}{1 + y'^2}\,dx,$$

aneb, vzhledem k (1),

$$\frac{dx}{d\alpha} = Y - y,$$

a tedy vzhledem k druhé rovnici (2):

$$\frac{dx}{d\alpha} = R\cos\alpha,$$

z čehož, nahradíme-li dx součinem $ds\cos\alpha$, opět nalézáme

$$\frac{ds}{d\alpha} = R, \quad ds = R\,d\alpha.$$

Differenciál oblouku čáry se tedy rovná differenciálu oblouku kružnice zakřivení, který přísluší středovému úhlu $d\alpha$ dvou sousedních normál.

129. O evolutě a evolventě křivky rovinné.

Evolutou dané křivky nazýváme geometrické místo všech středů křivostí jejích; naopak zoveme *evolventou* dané křivky čáru, jejíž evolutou jest daná křivka.

Jest-li daná křivka stanovena rovnicí

$$y = f(x),$$

jsou souřadnice X, Y středu zakřivení

$$X = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''},$$

a eliminací hodnot x, y z těchto tří rovnic obdržíme relaci mezi X a Y, t. j. rovnici evoluty dané čáry.

Kdyby byla daná křivka stanovena dvěma rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

tu nahradíme v rovnicích hořejších y' a y'' výrazy $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$ (čl. 106.), platnými pro neodvisle proměnnou t, a z rovnic tím vznikajících

$$X = x - \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \quad Y = y + \frac{dx(dx^2 + dy^2)}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

eliminujeme t; tím obdržíme rovnici evoluty.

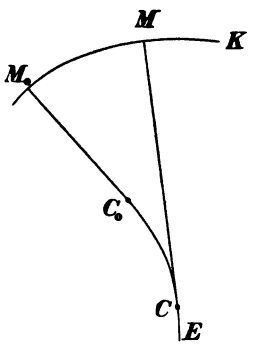
Normály dané křivky jsou tečnami k její evolutě, a přírůst poloměru zakřivení dané čáry se rovná příslušnému oblouku evoluty.

Budiž (obr. 24) K daná křivka, E její evoluta, $M_0 \ldots M$ body dané křivky a $C_0 \ldots C$ příslušné středy zakřivení její, naplňující evolutu E.

Značí-li x, y souřadnice bodu M a X, Y bodu C, máme dle předchozího článku

$$X = x - R\sin\alpha, \quad Y = y + R\cos\alpha,$$

kde $R = \overline{MC}$ jest poloměr zakřivení a α sklon tečny bodu M s kladnou osou x.



Obr. 24.

Differencováním

$$dX = dx - R\cos\alpha\,d\alpha - \sin\alpha\,dR = -\sin\alpha\,dR,$$
$$dY = dy - R\sin\alpha\,d\alpha + \cos\alpha\,dR = \cos\alpha\,dR,$$

poněvadž dx možno psáti $ds\cos\alpha$ čili $R\cos\alpha\,d\alpha$, obdobně dy možno psáti $R\sin\alpha\,d\alpha$. Nyní jest směrnice tečny evoluty v bodě C

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\cos\alpha\,dR}{-\sin\alpha\,dR} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

a tedy tečna ta kolmá k tečně dané čáry v bodě M, t. j. rovnoběžná s normálou dané čáry; bod C se však nalézá na této normále, a tedy splývá tečna evoluty v bodě C s normálou MC dané čáry.

Označíme-li s_1 oblouk C_0C evoluty, máme

$$ds_1^2 = dX^2 + dY^2 = \sin^2\alpha\, dR^2 + \cos^2\alpha\, dR^2 = dR^2,$$

a tedy

$$ds_1 = \pm dR.$$

Roste-li s R také s_1, máme $ds_1 = dR$, a tedy jest $s_1 - R = c$ stálá; pro bod M_0 máme $s_1 = 0$, $R = R_0$ a tedy $-R_0 = c$, čímž

$$s_1 - R = -R_0, \quad s_1 = R - R_0,$$

kde R_0 značí poloměr zakřivení $\overline{M_0C_0}$ v bodě M_0. Tím jest druhá část věty dokázána, neboť případ $ds_1 = -dR$, kdy tedy R ubývá s rostoucím s_1, převedeme na předchozí, zaměníme-li označení M, M_0 navzájem.

Z právě odvozeného výsledku

$$\text{arc } C_0C = \overline{MC} - \overline{M_0C_0}$$

soudíme, že možno křivku K vytvořiti jakožto geometrické místo koncového bodu M_0 neroztažitelného, však ohebného vlákna CC_0M_0, přiléhajícího podél CC_0 k evolutě E, odvinujeme-li je od křivky CC_0 tak, že v každé poloze se této křivky dotýká; neboť v poloze $\overline{CM}$ bude

$$\overline{CM} = \overline{C_0M_0} + \text{arc } CC_0,$$

a tedy bude M na dané čáře. Vzhledem k tomuto mechanickému vytvoření čáry K nazýváme ji evolventou n. odvinutou (développante) čáry E č. její evoluty (développée).

130. **Příklad: kuželosečky.**

Jde-li o poloměr zakřivení u kuželoseček, možno pojednati o ellipse, parabole i hyperbole současně na základě vrcholové jich rovnice

(3) $$y^2 = 2px + qx^2,$$

jež při $q = 0$ náleží parabole, při $p = \frac{b^2}{a}$, $q = -\frac{b^2}{a^2}$ ellipse o poloosách a, $b < a$ a při $p = -\frac{b^2}{a}$, $q = \frac{b^2}{a^2}$ hyperbole o reálné poloose a a laterálné b.

Derivujeme-li rovnici (3) dle x dvakrát, obdržíme

$$y\frac{dy}{dx} = p + qx, \tag{4}$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = q; \tag{5}$$

a odečteme-li čtverec rovnice (4) od součinu rovnic (3) a (5), obdržíme

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2.$$

Tím pro poloměr zakřivení

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

nalézáme

$$R = -\frac{\left[y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Avšak (čl. 119) $y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ podává čtverec normály N, tak že

$$R = -\frac{N^3}{p^2}, \tag{6}$$

t. j. *poloměr zakřivení u kuželosečky jest úměrný třetí mocnině normály, měřené až k první ose.*

Jest nyní snadné vyjádřiti N a tedy i R jakožto funkci jedné souřadnice bodu (x, y); zmocníme-li rovnici (4), obdržíme totiž

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = p^2 + 2pqx + q^2x^2 = p^2 + qy^2,$$

a tedy

$$N^2 = p^2 + (1 + q)\,y^2. \tag{7}$$

Jiného výrazu pro R, který možno snadno sestrojiti, se dodělámе, zavedeme-li do počtu úhel γ, který svírá normála s tím neb oním průvodičem FM bodu M (x, y). Souřadnice ohniska F bližšího vrcholu, v němž jest počátek souřadnic O, jsou $x = \frac{p}{q}(\sqrt{1+q} - 1)$, $y = 0$*) a jest tedy směrnice přímky

*) Pro $\lim q = 0$ jest $\lim \frac{\sqrt{1+q}-1}{2} = \frac{1}{2}$, a souřadnice ohniska paraboly ovšem $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

FM $\frac{y}{x-m}$, klademe-li za příčinou stručnosti m místo $\frac{p}{q}$ $(\sqrt{1+q}-1)$; vzhledem k (4) jest směrnice $-\frac{dx}{dy}$ normály $-\frac{y}{p+qx}$, a tedy úhel γ oběma přímkami sevřený stanoven rovnicí

$$\pm \operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{y}{x-m}+\frac{y}{p+qx}}{1-\frac{y^2}{(x-m)(p+qx)}} = y\frac{p-m+(1+q)x}{-pm-(p+mq)x}.$$

Avšak

$$p-m=\frac{p}{q}\sqrt{1+q}\,(\sqrt{1+q}-1)=m\sqrt{1+q},$$

$$p+mq=p\sqrt{1+q},$$

čímž

$$\pm \operatorname{tg}\gamma = -\frac{y}{p}\sqrt{1+q},$$

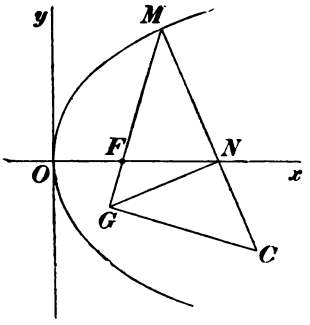
a rovnice (7) přejde do:

$$N=\frac{p}{\cos\gamma}, \tag{8}$$

t. j. *projekce normály kuželosečky na průvodič, vždy z téhož ohniska vycházející, jest stálá délka rovnající se parametru p.*

Vložíme-li za normálu N tuto hodnotu do (6), máme

$$R=-\frac{p}{\cos^3\gamma} \quad \text{aneb} \quad R=-\frac{N}{\cos^2\gamma}. \tag{9}$$



Obr. 25.

Tento poslední výraz pro R připouští snadnou jeho konstrukci. Veďme v bodě M (obr. 25.) normálu MN až k jejímu průsečíku N s první osou, zde vztyčme k ní kolmici NG až k jejímu průsečíku G s průvodičem MF, a v bodě G vztyčme kolmici GC k průvodiči; tato protne normálu ve středu křivosti C a jest tedy $\overline{MC}=R$ poloměrem zakřivení pro bod M. Patrně

$$\overline{MC}=\frac{\overline{MG}}{\cos\gamma}=\frac{\overline{MN}}{\cos^2\gamma},$$

jak toho vymáhá druhá formule (9).

Jde-li o stanovení evolut kuželoseček, jest s výhodou, užijeme-li středových rovnic u ellipsy a u hyperboly, u paraboly ovšem rovnice vrcholové.

Budiž tedy nejprve dána parabola rovnicí

$$y^2 = 2px,$$

z níž derivováním dvakrát vykonaným obdržíme

$$yy' = p, \quad yy'' + y'^2 = 0$$

a tedy

$$y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3},$$

čímž výrazy pro souřadnice X, Y středu křivosti

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

nabývají hodnot

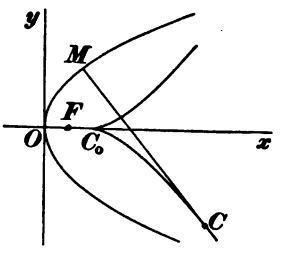
$$X = 3x + p, \quad Y = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Eliminací x, y z těchto rovnic a z rovnice paraboly obdržíme rovnici její evoluty

$$Y^2 = \frac{8}{27p}\left(X - p\right)^3.$$

Ku každé úsečce $X \geqq p$ patří dvě pořadnice Y jen znamením se různící a pro $X = p$ splývající s 0; jest tedy osa x osou symmetrie pro evolutu, a ta má (čl. 123.) v bodě C_0 $(p, 0)$ bod úvratu, dotýkajíc se v něm oběma větvemi osy x (obr. 26.).

Bod C_0 jest ovšem střed křivosti pro vrchol paraboly, jakož pro $x = 0$, $y = 0$ i z příslušných $X = p$, $Y = 0$ vychází.



Obr. 26.

Poněvadž Y a y jsou různých znamení, nalézají se středy zakřivení C bodů M nad osou x položených pod osou tou, a naopak. Pro $X = \infty$ jest i $Y = \pm\infty$, t. j. evoluta se vzdaluje do nekonečna; a poněvadž

$$\lim \frac{Y^2}{X^2} = \frac{8}{27p} \lim X\left(1 - \frac{p}{X}\right)^3 = \infty,$$

nemá asymptoty. Derivováním rovnice evoluty dle X nalezneme

$$YY' = \frac{4}{9p}(X-p)^2, \quad YY'' = \frac{8}{9p}(X-p) - Y'^2 = \frac{2}{9p}(X-p);$$

jest tedy $Y' \gtrless 0$ souhlasně s $Y \gtrless 0$, t. j. hořejší větev stále stoupá, dolejší stále klesá, a poněvadž souhlasně $Y'' \gtrless 0$, obrací hořejší větev dolů stranu konvexní, dolejší konkávní.

U ellipsy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b.$$

máme, derivujeme-li rovnici její dvakráte dle x,

$$\frac{x}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0, \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}(y'^2+yy'')=0,$$

a odtud

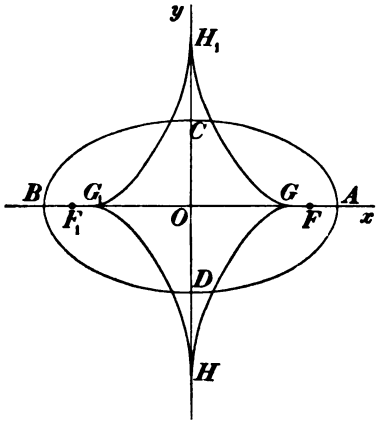
$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}, \quad y''=-\frac{b^4}{a^2y^3};$$

hodnoty ty, vloženy do obecných výrazů pro souřadnice X, Y středu křivosti, podávají

$$\text{(10)} \qquad X=\frac{c^2x^3}{a^4}, \quad Y=-\frac{c^2y^3}{b^4},$$

kde $c=\sqrt{a^2-b^2}$ jest lineárná výstřednost ellipsy. Z těchto rovnic a z rovnice ellipsy eliminujeme x, y; máme pro ně hodnoty $\frac{x}{a}=\left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\frac{y}{b}=\left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, jež vloženy do rovnice ellipsy podávají rovnici její evoluty:

$$\left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$



Obr. 27.

Učiníme-li

$$a_1=\frac{c^2}{a}, \quad b_1=\frac{c^2}{b},$$

jest rovnice evoluty

$$\left(\frac{X}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{Y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Poněvadž se výraz po levé straně nemění, zaměníme-li X, Y za $\pm X$, $\pm Y$, jsou obě osy souřadné osami souměrnosti pro evolutu (obr. 27.) Béřeme-li v úvahu body (x, y) prvního kvadrantu ellipsy, jest $x \geqq 0$,

$y \geqq 0$ a tedy dle (10) $X \geqq 0$, $Y \leqq 0$, t. j. příslušné body evoluty jsou ve čtvrtém kvadrantu, naplňujíce větev GH; bod G jest ovšem středem zakřivení pro vrchol A, maje dle (10) souřadnice $Y = 0$, $X = a_1$, a bod H jest středem zakřivení pro vrchol C a má souřadnice $X = 0$, $Y = -b_1$. Mimochodem z toho soudíme, že poloměry zakřivení ellipsy ve vrcholech A, C jsou resp. AG, CH, t. j. $a - a_1$, $b + b_1$ čili $\frac{b^2}{a}$, resp $\frac{a^2}{b}$. Dále poznamenejme, že evoluta jest cele uvnitř ellipsy při $b_1 < b$ čili $a < b\sqrt{2}$; při $b_1 = b$ čili $a = b\sqrt{2}$ splývají její body H, H_1 s vrcholy ellipsy D, C, a při $a > b\sqrt{2}$ vystupuje evoluta vně ellipsy, protínajíc ji ve čtyrech bodech, jakož naznačeno v obrazci.

Dle věty v předchozím článku dokázané snadno nalezneme délku GH jednoho kvadrantu evoluty; jest totiž tato délka rozdílem poměrů zakřivení ellipsy v bodech C a A, t. j.

$$\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

Že konkavita evoluty jest obrazem správně vyznačena, jakož i že body G, G_1, H, H_1 jsou body úvratu jejími, nechť si čtenář sám dokáže.

Při hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

bychom stejnou cestou nalezli rovnici evoluty

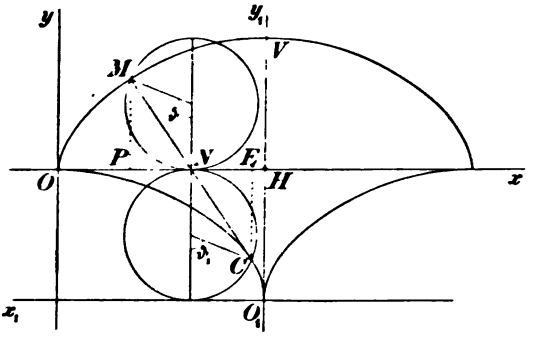
$$\left(\frac{X}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{Y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

kde opět položeno $a_1 = \frac{c^2}{a}$, $b_1 = \frac{c^2}{b}$, a kde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ značí zase lineárnou výstřednost hyperboly. Prozkoumání tvaru jejího budiž zůstaveno čtenáři.

131. **Příklad: cykloida.**

Souřadnice x, y bodu M cykloidy (obr. 28.) jsme vyjádřili formulemi (čl. 119.)

(11) $$x = a\vartheta - a\sin\vartheta, \quad y = a - a\cos\vartheta.$$



Obr. 28.

Derivováním nalézáme

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\,\frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta}}{d\,(a\vartheta - a\sin\vartheta)} = -\frac{1}{a\,(1-\cos\vartheta)^2},$$

a tedy pro poloměr zakřivení

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -a\,(1-\cos\vartheta)^2\left[\frac{2-2\cos\vartheta}{(1-\cos\vartheta)^2}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$= -2a\sqrt{2\,(1-\cos\vartheta)} = -4a\sin\frac{\vartheta}{2};$$

vzhledem k $y'' < 0$ jest cykloida dolů konkávní, a R vychází záporně.

Patrně $\overline{MN} = 2\sin\frac{\vartheta}{2}$, a jest tedy $\overline{MC} = 2\,.\,\overline{MN}$ poloměr zakřivení v bodě M.

Pro souřadnice X, Y středu zakřivení C nalézáme

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = a\vartheta + a\sin\vartheta,$$

$$Y = y + \frac{1+y'^2}{y''} = -(a - a\cos\vartheta).$$

Jest tedy $Y = -y$, věc vzhledem k $\overline{MN} = \overline{NC}$ i přímo patrná, kdežto $a\vartheta = \overline{ON}$, $a\sin\vartheta = \overline{PN}$ ukazují, že $X = \overline{ON} + \overline{PN} = \overline{ON} + \overline{NE}$, věc také přímo patrná.

Evoluta cykloidy jest opět cykloida a s. shodná s původní.

Podotkněme především, že pro $\vartheta = \pi$ jest $y' = 0$, $y'' = -\frac{1}{4a} < 0$ a tedy $y = 2a$ maximem; příslušný bod $V(\pi a, 2a)$ jest nejvyšším bodem cykloidy a poloměr zakřivení v něm má délku $4a\sin\frac{\pi}{2} = 4a$. Učiníme-li tedy $\overline{HV} = \overline{O_1H} = 2a$, jest O_1 střed zakřivení pro bod V a tedy bodem evoluty. Zvolme O_1 za počátek nových os sou-

řadných x_1, y_1 v obrazci vyznačených a označme X_1, Y_1 souřadnice středu křivosti C v této soustavě souřadné; patrně

$$X = -X_1 + \pi a, \quad Y = Y_1 - 2a,$$

a tedy

$$X_1 = \pi a - (a\vartheta + a \sin \vartheta), \quad Y_1 = 2a - (a - a \cos \vartheta).$$

Zavedeme-li nový proměnný úhel ϑ_1 rovnicí $\vartheta = \pi - \vartheta_1$, máme

$$X_1 = a\vartheta_1 - a \sin \vartheta_1, \quad Y_1 = a - a \cos \vartheta_1,$$

kteréž rovnice se shodují s rovnicemi (11); naplní tedy bod (X_1, Y_1) cykloidu shodnou s původní. Roste-li ϑ od 0 do 2π, tu ϑ_1 se mění od π do $-\pi$, a bod (X_1, Y_1) naplní tedy obě dolejší větve cykloidy v obrazci vyznačené, tvořící evolutu dané cykloidy.

Délka oblouku evoluty OO_1 jest dána rozdílem poloměrů zakřivení v bodech V a O, t. j. rozdílem $4a - 0 = 4a$; jest tedy $8a$ délka celé cykloidy. Obdobně jest délka oblouku O_1C, jemuž přísluší hodnoty ϑ_1 od 0 do ϑ_1, dána rozdílem $\overline{O_1V} - \overline{CM} = 4a - 4a \sin \frac{\vartheta}{2} = 4a - 4a \sin \frac{\pi - \vartheta_1}{2}$, a tedy jest délka oblouku OM:

$$4a - 4a \sin \frac{\pi - \vartheta}{2} = 8a \sin^2 \frac{\vartheta}{4}.$$

132. **Differenciál plochy a oblouku v polárných souřadnicích.**

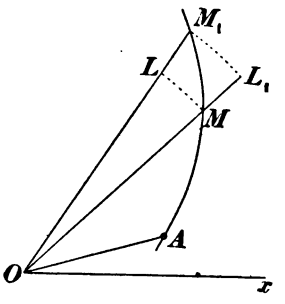
Dána budiž čára polárnou rovnicí $\varrho = f(\omega)$ a vytkněme sektor AOM (obr. 29.) omezený danou čarou a dvěma průvodiči $\overline{OA}$, $\overline{OM}$, z nichž první nechť jest pevný, druhý libovolný, o polárném úhlu ω. Plocha S tohoto sektoru jest patrně funkcí ω; jde o derivaci této funkce.

Přírůstu $\Delta\omega$ přísluší přírůst ΔS = ploše MOM_1; opíšeme-li kolem středu O kruhový oblouk ML poloměrem $\varrho = OM$, a M_1L_1 poloměrem $\varrho + \Delta\varrho = OM_1$, platí nerovnosti

kruhový sektor MOL $<$ ΔS $<$ kruhový sektor M_1OL_1,

t. j.

$$\frac{1}{2}\varrho^2 \Delta\omega < \Delta S < \frac{1}{2}(\varrho + \Delta\varrho)^2 \Delta\omega,$$



Obr. 29.

a tedy i

$$\frac{\varrho^2}{2} < \frac{\Delta S}{\Delta\omega} < \frac{(\varrho + \Delta\varrho)^2}{2}.$$

Při $\lim \Delta\omega = 0$ splývají vzhledem k spojitosti funkce $\varrho = f(\omega)$ obě krajní hodnoty a tedy s nimi splývá i limita střední hodnoty, t. j.

$$\frac{dS}{d\omega} = \frac{1}{2}\varrho^2, \quad dS = \frac{1}{2}\varrho^2\, d\omega.$$

Nazveme-li s délku oblouku AM, která jest také funkcí úhlu ω, tu možno stanoviti differenciál této funkce transformací výrazu

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

na polárné souřadnice. Volíme-li pól O za počátek a osu polárnou za osu x pravoúhlého systému, jsou souřadnice x, y bodu M

$$x = \varrho \cos\omega, \quad y = \varrho \sin\omega,$$

a tedy

$$dx = \cos\omega\, d\varrho - \varrho \sin\omega\, d\omega, \quad dy = \sin\omega\, d\varrho + \varrho \cos\omega\, d\omega,$$

z čehož sečtením čtverců

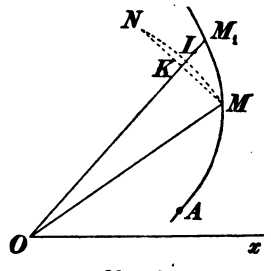
$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2\, d\omega^2, \quad ds = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2\, d\omega^2}.$$

K témuž výsledku dospějeme přímo takto: Veďme (obr. 30.) MK kolmo ku OM_1, pak $\overline{MM_1}^2 = \overline{KM}^2 + \overline{KM_1}^2$, a tedy také

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta\omega}\right)^2 = \left(\frac{\overline{KM}}{\Delta\omega}\right)^2 + \left(\frac{\overline{KM_1}}{\Delta\omega}\right)^2,$$

a pro $\lim \Delta\omega = 0$ i

$$\lim\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta\omega}\right)^2 = \lim\left(\frac{\overline{KM}}{\Delta\omega}\right)^2 + \lim\left(\frac{\overline{KM_1}}{\Delta\omega}\right)^2. \tag{12}$$



Obr. 30.

Limity se nezmění, nahradíme-li $\overline{MM_1}$ přírůstem

$$\Delta s = \text{arc } MM_1,$$

délku $\overline{KM}$ kruhovým obloukem ML kolem O opsaným, konečně $\overline{KM_1}$ délkou $\overline{LM_1} = \Delta\varrho$; k tomu cíli stačí ukázati, že podíl z původní hodnoty a z hodnoty ji nahrazující má za limitu 1 (čl. 59.).

V skutku nalézáme

$$\lim \frac{\overline{MM_1}}{\Delta s} = 1 \text{ dle čl. 125.,}$$

$$\lim \frac{\overline{KM}}{\text{arc } ML} = \lim \frac{2\overline{KM}}{2\text{arc } ML} = \lim \frac{\overline{MN}}{\text{arc } MN} = 1,$$

$$\lim \frac{\overline{KM_1}}{\overline{LM_1}} = \lim \frac{\overline{KL} + \overline{LM_1}}{\overline{LM_1}} = 1 + \lim \frac{\overline{OL} - \overline{OK}}{\overline{LM_1}}$$

$$= 1 + \lim \frac{\varrho - \varrho \cos \Delta\omega}{\Delta\varrho}$$

$$= 1 + \varrho \lim \left(\frac{1 - \cos \Delta\omega}{\Delta\omega} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta\varrho} \right) = 1,$$

jelikož $\frac{1 - \cos \Delta\omega}{\Delta\omega}$ dle čl. 58. má 0 za limitu.

Rovnici (12) možno tedy nahraditi rovnicí

$$\lim \left(\frac{\Delta s}{\Delta\omega} \right)^2 = \lim \left(\frac{\text{arc } ML}{\Delta\omega} \right)^2 + \lim \left(\frac{\overline{LM_1}}{\Delta\omega} \right)^2,$$

t. j.

$$\lim \left(\frac{\Delta s}{\Delta\omega} \right)^2 = \lim \left(\frac{\varrho \, \Delta\omega}{\Delta\omega} \right)^2 + \lim \left(\frac{\Delta\varrho}{\Delta\omega} \right)^2,$$

čili konečně

$$\left(\frac{ds}{d\omega} \right)^2 = \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega} \right)^2,$$

z níž nalézáme hořejší výsledek

$$ds^2 = \varrho^2 \, d\omega^2 + d\varrho^2.$$

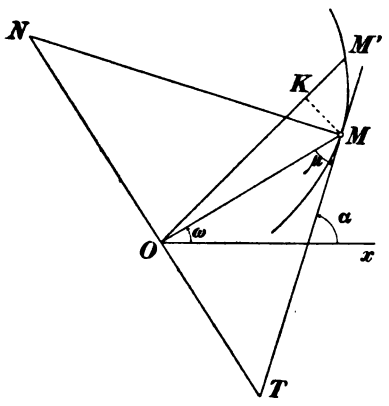
133. **Tečna a poloměr zakřivení v polárných souřadnicích.**

Tečna v bodě M (obr. 31.) jest limitní poloha sečny MM' pro případ, že bod M' se blíží na čáře bodu M; jest tedy úhel μ, který svírá tečna MT s průvodičem OM, limitou úhlu OM'M pro $\lim \Delta\omega = 0$.

Máme tedy

$\operatorname{tg} \mu = \lim \operatorname{tg} OM'M = \lim \frac{\overline{KM}}{\overline{KM'}}$, a tedy vzhledem k předchozímu článku

$$\operatorname{tg} \mu = \lim \frac{\varrho \, \Delta\omega}{\Delta\varrho} = \varrho \lim \frac{\Delta\omega}{\Delta\varrho},$$



Obr. 31.

t. j.

$$\operatorname{tg}\mu = \varrho\frac{d\omega}{d\varrho};$$

tím jest poloha tečny stanovena. Mnohdy jest s výhodou, míti po ruce i sin. a cos. úhlu μ; máme obdobně

$$\sin\mu = \lim \sin \mathrm{OM'M} = \lim \frac{\overline{\mathrm{KM}}}{\overline{\mathrm{MM'}}}$$

$$= \lim \frac{\varrho\,\Delta\omega}{\Delta s} = \varrho\frac{d\omega}{ds}$$

$$= \frac{\varrho\,d\omega}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2\,d\omega^2}},$$

$$\cos\mu = \lim \cos \mathrm{OM'M} = \lim \frac{\overline{\mathrm{KM'}}}{\overline{\mathrm{MM'}}} = \lim \frac{\Delta\varrho}{\Delta s} = \frac{d\varrho}{ds}$$

$$= \frac{d\varrho}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2\,d\omega^2}}.$$

Protne-li kolmice vedená pólem O k průvodiči OM tečnu v bodě T a normálu v bodě N, nazýváme $\overline{\mathrm{MT}}$, $\overline{\mathrm{MN}}$ polární tangentou a normálou, $\overline{\mathrm{OT}}$ a $\overline{\mathrm{ON}}$ pak polární subtangentou a subnormálou. Vzhledem k $\mathrm{ONM} = \mu$ a vzhledem k předchozímu výrazu pro $\operatorname{tg}\mu$ patrně máme

$$\overline{\mathrm{OT}} = \varrho\operatorname{tg}\mu = \varrho^2\frac{d\omega}{d\varrho},$$

$$\overline{\mathrm{MT}} = \sqrt{\varrho^2 + \varrho^4\left(\frac{d\omega}{d\varrho}\right)^2} = \frac{\varrho\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2\,d\omega^2}}{d\varrho} = \frac{\varrho\,ds}{d\varrho},$$

$$\overline{\mathrm{ON}} = \varrho\operatorname{cotg}\mu = \frac{d\varrho}{d\omega},$$

$$\overline{\mathrm{MN}} = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2} = \frac{\sqrt{\varrho^2\,d\omega^2 + d\varrho^2}}{d\omega} = \frac{ds}{d\omega}.$$

Poloměr zakřivení R byl dán formulí (čl. 126.)

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\alpha},$$

značíme-li α sklon tečny s osou polárnou; avšak

$$\alpha = \omega + \mu, \quad d\alpha = d\omega + d\mu,$$

kde

$$\operatorname{tg}\mu = \varrho\frac{d\omega}{d\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho'},$$

značíme-li ϱ' derivaci $\frac{d\varrho}{d\omega}$. Pokládáme-li ω za neodvisle proměnnou, tedy klademe-li $\frac{d\varrho'}{d\omega} = \varrho'' = \frac{d^2\varrho}{d\omega^2}$, máme differencováním

$$\frac{d\mu}{\cos^2\mu} = \frac{\varrho' d\varrho - \varrho\, d\varrho'}{\varrho'^2} = \frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho'^2}\, d\omega,$$

$$d\mu = \frac{d\varrho^2}{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2}\frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho'^2}\, d\omega = \frac{\varrho'^2}{\varrho'^2 + \varrho^2}\frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho'^2}\, d\omega$$

$$= \frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho'^2 + \varrho^2}\, d\omega,$$

a tedy

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\omega + d\mu} = \frac{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2}}{d\omega + \frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho'^2 + \varrho^2}\, d\omega},$$

t. j. dělíme-li čítatel i jmenovatel $d\omega$,

$$\mathrm{R} = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}.$$

Touž formuli obdržíme, zavedeme-li do výrazu

$$\mathrm{R} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

na místo proměnných x, y polárné souřadnice formulemi

$$x = \varrho\cos\omega, \quad y = \varrho\sin\omega;$$

transformace ta provedena jakožto příklad v čl. 106.

Zavedeme-li reciproký průvodič $\sigma = \frac{1}{\varrho}$ místo ϱ do počtu, obdržíme R v jiném pozoruhodném tvaru; pak totiž $\varrho = \frac{1}{\sigma}$, $\varrho' = -\frac{\sigma'}{\sigma^2}$, $\varrho'' = -\frac{\sigma''}{\sigma^3} + \frac{2\sigma'}{\sigma 4}$ a tedy

$$\mathrm{R} = \frac{(\sigma^2 + \sigma'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sigma^3(\sigma + \sigma'')}.$$

134. **Příklady.**

Archimedova spirála č. závitnice jest čára stanovená rovnicí

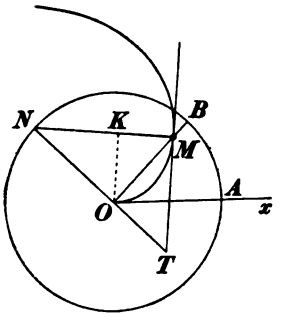
$$\varrho = a\omega,$$

v níž a značí kladnou stálou, znázorněnou délkou $\overline{OA}$ (obr. 32.).

Opíšeme-li kolem pólu O kružnici poloměrem $\overline{OA}$, a naneseme-li libovolný oblouk její AB na průvodič OB, tak že

$$\text{arc AB} = \overline{OM},$$

jest M bodem spirály.



Obr. 32.

Roste-li ω od 0 do ∞, roste ϱ též od 0 do ∞. Polárnímu úhlu $\omega + 2\pi$ přísluší průvodič

$$\varrho_1 = a\,(\omega + 2\pi) = \varrho + 2\pi a,$$

t. j. v druhém závitu spirály jsou průvodiče o obvod kružnice delší než v prvním, a obdobně pro další závity.

Pro úhel μ sevřený tečnou a průvodičem máme

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varrho\, d\omega}{d\varrho} = \frac{\varrho\, d\omega}{a\, d\omega} = \frac{\varrho}{a};$$

čím větší ϱ, tím více se μ blíží pravému úhlu, t. j. pro velmi vzdálené závity se spirála Archimedova přibližuje kružnici o velikém poloměru. Pro $\omega = 0$ jest i $\varrho = 0$ a tedy i $\mu = 0$, t. j. spirála vychází z pólu O a dotýká se v něm osy polárné.

Subnormála $= \frac{d\varrho}{d\omega} = a$ jest stálá; normálu MN tedy sestrojíme jako spojnici bodu M s průsečíkem kolmice ON, vztyčené v pólu k průvodiči, a kružnice základní.

Poloměr zakřivení

$$R = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''} = \frac{(\varrho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2a^2},$$

poněvadž $\varrho'' = 0$; za příčinou jeho sestrojení pišme

$$R = \frac{h^3}{h^2 + a^2},$$

kladouce normálu $\overline{MN} = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} = \sqrt{\varrho^2 + a^2} = h$. Promítneme-li subnormálu $\overline{ON}$ na normálu do $\overline{NK} = a'$, máme $a^2 = a'h$ a tedy

$$R = \frac{h^3}{h^2 + a'h} = \frac{h^2}{h + a'},$$

a jest tedy h střední měřická úměra mezi $h + a'$ a R, z čehož snadno R sestrojíme.

Hyperbolickou spirálou zoveme čáru, v níž součin z průvodiče a z polárného úhlu jest stálý, tedy čáru danou rovnicí

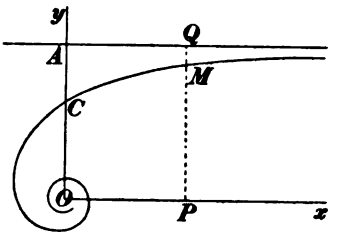
$$\varrho = \frac{a}{\omega},$$

v níž a značí kladnou stálou.

Pro nekonečně malý úhel ω jest průvodič ϱ nekonečně velký, a s rostoucím ω mu stále ubývá, až pro $\lim \omega = \infty$ jest $\lim \varrho = 0$, jakož to i obr. 33. znázorňuje. Značíme-li x, y pravoúhlé souřadnice bodu M spirály, máme

$$y = \varrho \sin \omega = a \frac{\sin \omega}{\omega},$$

$$\lim_{\omega = 0} y = a,$$



Obr. 33.

t. j. pořadnice do nekonečna se vzdalujícího bodu čáry jest a; vedeme-li v této vzdálenosti od osy x přímku AQ s ní rovnoběžnou, jest to asymptota spirály, neboť

$$\lim \overline{MQ} = \lim_{\omega = 0} (a - y) = a - \lim y = 0.$$

Z rovnice

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varrho d\omega}{d\varrho} = -\omega$$

soudíme, že čím větší ω, tím více se μ blíží $\frac{\pi}{2}$ a tedy spirála tvaru kružnice, a poněvadž polární subtangenta $= \varrho \operatorname{tg} \mu = -a$ jest známá stálá, máme snadnou konstrukci tečny; pro $\varrho = \infty$ z toho opět vychází, že $\overline{OA}$ jest subtangentou bodu v nekonečnu, tedy AO jeho tečnou č. asymptotou.

Exponenciálnou č. logarithmickou spirálou zoveme čáru o rovnici

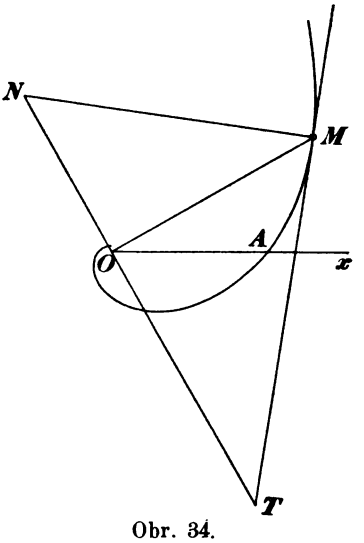
$$\varrho = ae^{m\omega},$$

v níž a jest danou délkou, m kladným číslem.

Pro $\omega = 0$ jest $\varrho = a$, a tedy bod A na ose polárné ve vzdálenosti $\overline{OA} = a$ bodem spirály (obr. 34.); roste-li ω od 0 do ∞, roste ϱ od a do ∞, a ubývá-li úhlu ω od 0 do $-\infty$, ubývá průvodiči ϱ od a do 0, t. j. čára se blíží, tvoříc nekonečné množství závitů, pólu O. Poněvadž

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varrho\, d\omega}{d\varrho} = \frac{\varrho\, d\omega}{m\, \varrho\, d\omega} = \frac{1}{m},$$

jest úhel μ stálý, t. j. exponenciálná spirála protíná všecky průvodiče v stálém sklonu μ.



Obr. 34.

Polární subnormála

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = mae^{m\omega} = m\varrho,$$

a polární normála $\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} = \varrho\sqrt{1 + m^2}$ jsou obě úměrny průvodiči; poloměr zakřivení vzhledem k $\varrho'' = m\varrho' = m^2\varrho$ jest

$$R = \frac{(\varrho^2 + m^2\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + m^2\varrho^2} = \varrho\sqrt{1 + m^2}$$

a tedy se rovná délce polárné normály $\overline{MN}$.

Tvar této křivky jest zcela nezávislý na stálé a; změna její má za následek pouze změnu polohy čáry k polárné ose. Zvolíme-li totiž jinou přímku OX_1 pólem vedenou za novou osu polárnou, bude bod (ω, ϱ) míti nové souřadnice (ω_1, ϱ) a patrně $\omega = \alpha + \omega_1$, značí-li α úhel XOX_1; rovnice naší spirály přejde tedy do

$$\varrho = ae^{m(\alpha+\omega_1)} = a_1 e^{m\omega_1},$$

klademe-li $a_1 = ac^{m\alpha}$. Příhodnou volbou úhlu α možno toho docíliti, aby faktor a_1 nabyl jakékoli kladného dnoty; stačí položiti

$$\alpha = \frac{\log a_1 - \log a}{m}.$$

Pro speciálné hodnoty $a = 1$, $m = 1$ máme spirálu $\varrho = e^{\omega}$, při níž uzavírá každý průvodič s tečnou úhel $\frac{\pi}{4}$. Pomocí této spirály možno prováděti násobení graficky; stačí opsati kolem pólu danými faktory ϱ, ϱ_1 dvě kružnice, jež spirálu protnou ve dvou bodech o polárných úhlech ω, ω_1, a pak sestrojiti k polárnému úhlu $\omega + \omega_1$ průvodič; tento znázorňuje součin $\varrho\varrho_1$, neboť

$$\varrho = e^{\omega}, \quad \varrho_1 = e^{\omega_1}, \quad \varrho\varrho_1 = e^{\omega+\omega_1}.$$

Převedeme-li rovnici *lemniskaty* v pravoúhlých souřadnicích

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = 0$$

substitucí

$$x = \varrho\cos\omega, \quad y = \varrho\sin\omega$$

na souřadnice polárné, máme

$$\varrho^2(\varrho^2 - 2c^2\cos 2\omega) = 0,$$

čili, pomíjejíce nullový průvodič pólu,

$$\varrho^2 = 2c^2\cos 2\omega$$

jakožto polárnou rovnici lemniskaty. Z ní derivováním dle ω

$$\varrho\varrho' = -2c^2 \sin 2\omega,$$
$$\varrho\varrho'' + \varrho'^2 = -4c^2 \cos 2\omega = -2\varrho^2.$$

Pro poloměr zakřivení tedy nalezneme vložením $-2\varrho^2 - \varrho'^2$ za $\varrho\varrho''$:

$$R = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''} = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{3(\varrho^2 + \varrho'^2)} = \frac{1}{3}\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2},$$

t. j. u lemniskaty se rovná poloměr zakřivení jedné třetině polárné normály.

135. **O čarách obalujících.**

Obsahuje-li rovnice čáry

$$f(x, y, \alpha) = 0 \tag{13}$$

veličinu α, t. z. parametr, která může nabývati všech hodnot jistého intervallu neb všech hodnot vůbec, tu stanoví rovnice ta *soustavu čar závislých na jednom parametru.*

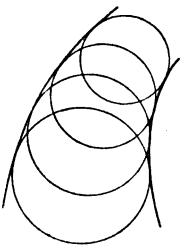
Čára soustavy příslušná parametru $\alpha + \Delta\alpha$ má rovnici

$$f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0, \tag{14}$$

a body společné oběma čarám — ač-li takové existují — hoví oběma rovnicím (13) i (14). Mají-li průsečíky ty pro $\lim \Delta\alpha = 0$ určité limitní polohy, nazýváme geometrické místo těchto limitních poloh čarou obalující č. enveloppou soustavy (13); *jest tedy čára obalující geometrickým místem průsečíku nekonečně blízkých čar dané soustavy, které samy se zovou obalenými (enveloppées)**).

Souřadnice x, y, hovící rovnicím (13) a (14), hoví také rovnicím

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$
$$\frac{f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0.$$



Obr. 35.

Má-li $f(x, y, \alpha)$ parciálnou derivaci dle α, soudíme, že limitní polohy průsečíků čar (13) a (14) pro $\lim \Delta\alpha = 0$ hoví rovnicím

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \tag{15}$$

*) *Leibnitz* byl as první, jenž stanovil obalující čáru, a s. jisté soustavy kružnic, jakožto geometrické místo průsečíků nekonečně blízkých čar, v pojednání „Nova Calculi differentialis applicatio", otištěném v Lipských Aktech z r. 1694. K zajímavé souvislosti problému onou obálkou řešeného s theorií singulárných řešení rovnic differenciálných poukázal *Lagrange* v Leçons sur le Calcul des fonctions; v. Oeuvres, t. X, Leçon XVII^e.

a že tedy eliminací α z těchto dvou rovnic obdržíme rovnici obálky

(16) $$\varphi(x, y) = 0.$$

Ostatně možno stanoviti obalující čáru také tím způsobem, že rovnice (15) řešíme dle x a y, a tím obě tyto souřadnice vyjádříme jakožto funkce proměnného parametru α.

Čára obalující dotýká se všech čar obalených a s. každé v těch bodech, v nichž jest protnuta nekonečně blízkou čarou soustavy (obr. 35.).

Směrnici $\frac{dy}{dx}$ tečny čáry (13) v bodě x, y stanovíme z rovnice

(17) $$\frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial y} dy = 0.$$

Rovnice obálky plyne eliminací α z rovnic (15); eliminaci tu možno tak provésti, že z druhé rovnice stanovíme α jakožto funkci x, y a hodnotu tu vložíme do první. Jest tedy $f = 0$ také rovnicí obálky, za té ovšem supposice, že α jest ona právě vytknutá funkce x, y. Pro směrnici $\frac{dy}{dx}$ tečny obálky máme tedy rovnici

(18) $$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0, \quad \text{kde } d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy.$$

Jde-li o tečnu obalené čáry a obálky v bodě x, y daném rovnicemi (15), máme v něm $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, a tedy (18) se redukuje na (17), t. j. v onom bodě mají obalená i obalující čára touž tečnu, jak bylo dokázati.

Mějme n. p. soustavu čar přímých takto vytčenou:

Na ose x pravoúhlé soustavy souřadné budiž dán bod F souřadnicemi $(c, 0)$; jej spojme s libovolným bodem M $(0, \alpha)$ osy Oy a vztyčme v M kolmici k MF. Kolmice ty tvoří soustavu čar závislých na parametru α; jest totiž

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{\alpha} = 1 \text{ čili } y = -\frac{\alpha}{c} x + \alpha$$

rovnice spojnice MF, a tedy

$$y = \frac{c}{\alpha} x + \alpha \text{ čili } f = \alpha y - cx - \alpha^2 = 0$$

rovnice kolmice. Eliminací α z této a z rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \text{t. j.} \quad y - 2\alpha = 0,$$

obdržíme rovnici obálky

$$y^2 = 4cx;$$

obálka jest tedy parabola, jejíž vrchol jest O a ohnisko F.

Jakožto druhý příklad uvažujme opět soustavu přímek a s. všech normál dané čáry

$$y = f(x).$$

Obálka těchto normál jest evoluta dané čáry č. geometrické místo všech středů křivostí jejích (čl. 129.); a to také vychází přímým stanovením této obálky.

Rovnice normály jest

$$(19) \quad \mathrm{Y} - y = -\frac{1}{y'}(\mathrm{X} - x) \text{ čili } f = y'(\mathrm{Y} - y) + \mathrm{X} - x = 0;$$

ona závisí na parametru x, jehož funkcí jest y a y'. Položíme-li tedy

$$(20) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \text{t. j.} \quad y''(\mathrm{Y} - y) - y'^2 - 1 = 0,$$

plynou řešením rovnic (19) a (20) dle X, Y souřadnice bodu obálky jakožto funkce parametru x. Z (20) máme $\mathrm{Y} - y$ a pak z (19) $\mathrm{X} - x$ a s.

$$\mathrm{Y} - y = \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \mathrm{X} - x = -\frac{y'(1 + y'^2)}{y''},$$

což ukazuje, že bod X, Y jest skutečně středem zakřivení dané čáry.

Dalším příkladem budiž soustava kružnic sestrojených nad průměry $\overline{OM}$. spojující počátek O s body M dané čáry K.

Označíme-li x, y souřadnice bodu M a je-li

$$(21) \quad y = f(x)$$

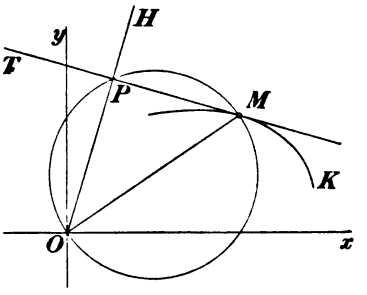
rovnice dané čáry K, jest rovnice kružnice, značí-li X, Y její běžné souřadnice,

$$\left(\mathrm{X} - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\mathrm{Y} - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4},$$

čili

$$(22) \quad f = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - x\mathrm{X} - y\mathrm{Y} = 0;$$

v rovnici té pokládejme x za parametr, na němž ovšem dle (21) zá-



Obr. 36.

visí y. Derivováním dle parametru a annullováním derivace máme

$$-X-Y\frac{dy}{dx}=0. \tag{23}$$

Bod P (X, Y) enveloppy hoví rovnicím (22) a (23); z poslední soudíme, že $\frac{dy}{dx}=-\frac{X}{Y}$, t. j. že tečna MT dané čáry K jest kolmá ke spojnici OP počátku s bodem P enveloppy, v němž se vytknutá kružnice jí dotýká. Jest tedy obálka soustavy kružnic (22) geometrickým místem pat kolmic spuštěných s počátku O na tečny dané čáry K, t. j. *obálka jest t. z. půdicí dané čáry pro pól* O.

Téhož výsledku dojdeme geometricky takto: Značí-li M' bod čáry K nekonečně blízký k M, protnou se kružnice sestrojené nad průměry $\overline{OM}$ a $\overline{OM'}$ mimo bod O ještě v bodě, jejž označme P. Úhly OPM a OPM' jsou oba úhly obvodové v polokruzích, a tedy pravé, t. j. přímka OP jest kolma k PM i k PM', z čehož jde, že body P, M, M' jsou na jedné přímce, tedy P na MM' čili na tečně čáry K v M sestrojené.

Ku konci podotkněme, že každý systém čar závislých na jednom parametru nemá obalující čáry; n. p. soustava soustředných kružnic $f=x^2+y^2-\alpha^2=0$ nemá obálky, poněvadž se dvě čáry soustavy nikdy neprotínají. Položíme-li $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$, obdržíme rovnici vzhledem k libovolnosti parametru α zcela bezvýznamnou $-2\alpha=0$.

136. O styku čar v rovině.

Buďte

$$y=f(x),\quad y=\varphi(x) \tag{24}$$

rovnice dvou čar procházejících bodem $M(x_0, y_0)$, tak že $f(x_0)=\varphi(x_0)$.

O čarách těch pravíme, že mají v bodě M styk stupně n-ho, možno-li bodu A čáry první, nekonečně blízkému k M, přiřaditi bod A' čáry druhé nekonečně blízký k M takovým způsobem, aby vzdálenost $\overline{AA'}$ byla vzhledem k oblouku MA neb k tětivě $\overline{MA}$ (čl. 125.) nekonečně malá stupně $n+1$ *).

*) *E. Picard,* Traité d'Analyse, t. I, pag. 318.

Hledejme výminky, za kterými mají dvě čáry styk stupně n.

Bod A měj souřadnice $x_0 + h$, $y_0 + k$, tak že $y_0 + k = f(x_0 + h)$, a bod A' souřadnice $x_0 + h_1$. $y_0 + k_1$, tak že $y_0 + k_1 = \varphi(x_0 + h_1)$; bod A jest A' přiřaděn, známe-li h_1 jakožto funkci h. Čáry mají styk n-ho stupně, možno-li tuto funkci tak vytknouti, aby platilo

$$\lim_{h=0} \frac{\overline{AA'}}{h^{n+1}} = \alpha, \text{ t j. } \lim_{h=0} \frac{\sqrt{(h_1 - h)^2 + (k_1 - k)^2}}{h^{n+1}} = \alpha,$$

kde α jest hodnota různá od nully, neboť vzhledem k $\lim \frac{\text{arc MA}}{h}$ $= \sqrt{1 + f'(x_0)^2}$ (čl. 125.) jsou arc MA a h nekonečně malé téhož stupně. K tomu jest ale nutné a stačí, aby buď oba rozdíly $h_1 - h$ a $k_1 - k$ byly nekonečné malé n-ho stupně, aneb alespoň jeden, je-li druhý nekonečně malý stupně vyššího; máme totiž

$$\lim \left(\frac{h_1 - h}{h^{n+1}}\right)^2 + \lim \left(\frac{k_1 - k}{h^{n+1}}\right)^2 = \alpha^2.$$

a jest tedy aspoň jedna z limit na levé straně různa od nully.

Rozvineme-li $f(x_0 + h)$ a $\varphi(x_0 + h_1)$ dle věty Taylorovy, obdržíme

$$k = f'(x_0)\, h + f''(x_0) \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \cdot\cdot,$$

$$k_1 = \varphi'(x_0)\, h_1 + \varphi''(x_0) \frac{h_1^2}{1 \cdot 2} + \cdot\cdot,$$

což ovšem předpokládá, že $f'(x_0)$ a $\varphi'(x_0)$ jsou hodnoty konečné, t. j. že tečny daných čar v bodě M nejsou rovnoběžny s osou y.

Je-li h_1 jakožto funkce h dáno obecně rozvojem

$$h_1 = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \cdot\cdot,$$

v němž absolutní člen jest 0, poněvadž při $h = 0$ také $h_1 = 0$, máme

$$h_1 - h = (c_1 - 1)\, h + c_2 h^2 + \cdot\cdot;$$

aby rozdíl ten byl nekonečně malý $n + 1$-ho stupně, musí

$$c_1 - 1 = 0,\ c_2 = 0,\ \cdot\cdot\ c_n = 0.$$

Pak ale

$$h_1 = h + c_{n+1} h^{n+1} + c_{n+2} h^{n+2} + \cdot\cdot, \tag{25}$$

a druhý rozdíl jest

$$k_1 - k = \varphi'(x_0)\,(h + c_{n+1}h^{n+1} + \ldots) - f'(x_0)\,h$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2}\left[\varphi''(x_0)\,(h + c_{n+1}h^{n+1} + \ldots) - f''(x_0)\,h^2\right]$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\left[\varphi'''(x_0)\,(h + c_{n+1}h^{n+1} + \ldots) - f'''(x_0)\,h^3\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

aneb, seřaděn dle mocností h,

$$k_1 - k = \left[\varphi'(x_0) - f'(x_0)\right]h + \left[\varphi''(x_0) - f''(x_0)\right]\frac{h^2}{1\,.\,2} + \ldots$$
$$+ \left[\varphi^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\right]\frac{h^n}{\underline{n}} + \ldots$$

Rozdíl ten jest nekonečně malý stupně $n+1$-ho, platí-li

(26) $\varphi'(x_0) = f'(x_0),\quad \varphi''(x_0) = f''(x_0), \ldots\ \varphi^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$

To jsou tedy nutné a postačující výminky, aby čáry (24) měly v společném bodě $x_0,\ y_0 = f(x_0) = \varphi(x_0)$ styk n-ho stupně; při tom supponujeme ovšem $\varphi^{(n+1)}(x_0) \gtrless f^{(n+1)}(x_0)$, neb jinak by byl styk vyššího než n-ho stupně. Korrespondence bodů A, A', v definici styku vytčená, jest dána rovnicí (25), v níž koefficienty $c_{n+1},\ c_{n+2}, \ldots$ konvergentní řady jsou jinak libovolná čísla.

Pořadnice $f(x_0 + h)$ a $\varphi(x_0 + h)$ čar (24) ve styku n-ho stupně mají rozdíl

(27) $$\varphi(x_0 + h) - f(x_0 + h) = \left[\varphi^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(x_0)\right]\frac{h^{n+1}}{\underline{n+1}} + \ldots$$

nekonečně malý stupně $n+1$-ho, který také ukazuje, že čáry v sousedství společného bodu $(x_0,\ y_0)$ tím blíže k sobě probíhají, čím vyšší jest stupeň styku n. Věc ta se ale ještě více objasní následující větou *):

Mají-li dvě čáry v bodě M styk n-ho stupně, tu čára třetí mající v M s jednou z nich styk nižší, nemůže v sousedství bodu M nikdy probíhati mezi nimi; má-li s jednou styk stejného stupně n neb vyššího, může ale nemusí tak činiti.

Čáry (24) mějte v bodě $M(x_0,\ y_0)$ styk n-ho stupně, t. j. rovnice (26) buďte vyplněny a zároveň platiž $\varphi^{(n+1)}(x_0) \gtrless f^{(n+1)}(x_0)$ třetí čára měj rovnici $y = F(x)$, procházej bodem M a měj v něm s čarou $y = f(x)$ styk stupně m, t. j. předpokládejme, že platí rovnice

(28) $f(x_0) = F(x_0),\ f'(x_0) = F'(x_0), \ldots, f^{(m)}(x_0) = F^{(m)}(x_0),$

a že zároveň $f^{(m+1)}(x_0) \gtrless F^{(m+1)}(x_0)$.

*) *Lagrange*, Théorie des fonctions analytiques, 2e Partie, chap. I.

Pak máme pro rozdíl pořadnic rozvoj

(29)
$$f(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0+h)=\left[f^{(m+1)}(x_0)-\mathrm{F}^{(m+1)}(x_0)\right]\frac{h^{m+1}}{\underline{|m+1}}+\ldots,$$

a přičteme-li tuto rovnici k rovnici (27),

(30)
$$\varphi(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0+h)=\left[f^{(m+1)}(x_0)-\mathrm{F}^{(m+1)}(x_0)\right]\frac{h^{m+1}}{\underline{|m+1}}+\ldots$$
$$+\left[\varphi^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0)\right]\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}+\ldots$$

Při $m<n$ se v obou těchto rozvojích na pravo vyskytuje týž člen nejnižšího stupně, totiž

$$\left[f^{(m+1)}(x_0)-\mathrm{F}^{(m+1)}(x_0)\right]\frac{h^{m+1}}{\underline{|m+1}},$$

a mají tedy pro dosti malé $|h|$ výrazy (29) a (30) totéž znamení, t. j. čára třetí neprobíhá mezi danými dvěma čarami.

Při $m=n$ jsou nejnižší (č. hlavní) členy rozvojů (29) a (30):

$$\left[f^{(n+1)}(x_0)-\mathrm{F}^{(n+1)}(x_0)\right]\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}},$$

resp.
$$\left[\varphi^{(n+1)}(x_0)-\mathrm{F}^{(n+1)}(x_0)\right]\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}$$

a ty mohou, ale nemusí míti stejné označení, t j. čára třetí pak probíhá mezi danými čarami aneb neprobíhá souhlasně s tím, že rozdíly $f^{(n+1)}(x_0)-\mathrm{F}^{(n+1)}(x_0)$, $\varphi^{(n+1)}(x_0)-\mathrm{F}^{(n+1)}(x_0)$ nejsou neb jsou stejného znamení.

Při $m>n$ konečně jsou v rozvojích (29) a (30) nejnižší členy

$$\left[f^{(m+1)}(x_0)-\mathrm{F}^{(m+1)}(x_0)\right]\frac{h^{m+1}}{\underline{|m+1}},$$

resp.
$$\left[\varphi^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0)\right]\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}},$$

jež mohou míti stejné i různé označení, t. j. čára třetí může probíhati mezi danými čarami, ale také mimo ně; kdy nastane ten neb onen případ, čtenář snadno z označení závorek a ze sudosti neb lichosti čísel m a n ihned pozná.

137. Čáry oskulující, zvlášť kružnice.

Dána-li soustava čar, závislých na r parametrech

(31)
$$\varphi(x, y, a_1, a_2, \ldots a_r)=0,$$

možno se tázati po oné čáře soustavy, která má s danou čarou

(32) $$y = f(x)$$

v daném bodě $M(x_0, y_0)$ styk nejvyššího stupně č. *po čáře soustavy oskulující v bodě* M *danou čáru.*

Jest-li onen styk n-ho stupně, musí $y, y', \ldots, y^{(n)}$ stanovené z rovnice (31) se resp. rovnati hodnotám $f(x_0), f'(x_0), \ldots f^{(n)}(x_0)$, čímž se ukládají $n + 1$ rovnice parametrům $a_1, a_2, \ldots a_r$. Obecně tedy možno položiti $n + 1 = r$, t. j. oskulující čára má styk r — 1-ho stupně s čarou danou; pro speciálné body M se ovšem může státi, že se i vyšší derivace pořadnic obou čar shodují, že tedy styk jest stupně vyššího.

Rovnice kružnice

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

závisí na třech parametrech a, b, R, a možno tedy ustanoviti kružnici, mající s danou čarou (32) v daném bodě styk druhého stupně; ta pak sluje oskulační kružnicí v onom bodě.

Derivujeme-li rovnici kružnice dvakrát dle x, obdržíme

$$x - a + (y - b)\, y' = 0,$$
$$1 + y'^2 + (y - b)\, y'' = 0.$$

Hodnoty y, y', y'' z těchto tří rovnic plynoucí musí se pro oskulační kružnici bodu (x, y) shodovati s resp. hodnotami $f(x), f'(x), f''(x)$. Řešením poslední rovnice dle $y - b$, předposlední pak dle $x - a$, nápotom předchozí dle R, obdržíme

$$y - b = -\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad x - a = \frac{y'(1 + y'^2)}{y''},$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''};$$

pokládajíce v těchto formulích y, y', y'' za hodnoty z (32) plynoucí, máme tím souřadnice středu a, b a poloměr R oskulační kružnice.

Přihlédneme-li k formulím čl. 127. vidíme, *že oskulační kružnice jest totožna s kružnicí křivosti dané čáry.*

Kružnici tu možno ještě jiným způsobem definovati a to na základě věty:

Oskulační kružnice čáry v daném bodě M *jest limitní poloha kružnice vedené tímto bodem a dvěma nekonečně blízkými body čáry.*

Aby kružnice o středu (a, b) a poloměru R procházela bodem dané čáry (32) o úsečce x, musí výraz

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 \quad \text{čili} \quad V(x)$$

vymizeti; aby procházela bodem čáry o úsečce $x + h_1$ a také dalším bodem jejím o úsečce $x + h_2$, musí výrazy $V(x + h_1)$ a $V(x + h_2)$ vymizeti. Máme tedy ku stanovení hodnot a, b, R tři rovnice

$$V(x) = 0, \quad V(x + h_1) = 0, \quad V(x + h_2) = 0,$$

které možno nahraditi rovnicemi

$$V(x) = 0, \quad V(x + h_1) - V(x) = 0, \quad V(x + h_2) - V(x) = 0,$$

aneb rovnicemi (čl. 68.)

$$V(x) = 0, \quad h_1 V'(x + \vartheta_1 h_1) = 0, \quad h_2 V'(x + \vartheta_2 h_2) = 0,$$

v nichž ϑ_1, ϑ_2 značí hodnoty mezi 0 a 1. Krátíce faktory h_1, h_2 můžeme tyto rovnice nahraditi následujícími

$$V(x) = 0, \quad V'(x + \vartheta_1 h_1) = 0, \quad V'(x + \vartheta_2 h_2) - V'(x + \vartheta_1 h_1) = 0$$

aneb, opět vzhledem k větě o přírůstu funkce, rovnicemi

$$V(x) = 0, \quad V'(x + \vartheta_1 h_1) = 0,$$
$$V''(x + \vartheta_1 h_1 + \vartheta(\vartheta_2 h_2 - \vartheta_1 h_1)) = 0,$$

kde $0 < \vartheta < 1$.

Blíží-li se h_1 a h_2 nulle, blíží se tedy a, b, R limitním hodnotám, jež vypočteme z rovnic

$$V(x) = 0, \quad V'(x) = 0, \quad V''(x) = 0;$$

avšak

$$V(x) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2,$$
$$V'(x) = 2(x - a) + 2(y - b)\, y',$$
$$V''(x) = 2 + 2y'^2 + 2(y - b)\, y'',$$

kde $y = f(x)$, $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$, a jsou to tedy tytéž rovnice, z nichž jsme vypočetli souřadnice středu a, b a poloměr R kružnice oskulační.

Obdobně bychom mohli ukázati, že čára soustavy (31) oskulující čáru danou (32) v bodě $M(x, y)$ jest limitní poloha čáry soustavy, vedené bodem M a $r - 1$ nekonečně blízkými body dané čáry.

V čl. 130. stanoveny souřadnice středu a poloměr oskulační kružnice u ellipsy o poloosách a, b; kružnice ta má styk 2. stupně

s ellipsou, jen ve vrcholech jest styk stupně třetího. Pro vrchol $(0, b)$ jest rovnice kružnice oskulační

$$x^2 + \left(y + \frac{a^2 - b^2}{b}\right)^2 = \frac{a^4}{b^2};$$

pro bod $(0, b)$ z této rovnice plynou hodnoty $y' = 0$, $y'' = -\frac{b}{a^2}$, $y''' = 0$, a tytéž derivace má pořadnice ellipsy v bodě $(0, b)$; čtvrtá derivace u kružnice jest $-3\frac{b^3}{a^6}$, u ellipsy však $-3\frac{b}{a^4}$. Mají tedy obě čáry v bodě $(0. b)$ styk 3. stupně čili hyperoskulaci.

Kapitola X.

Theorie křivosti čar v prostoru.

138. **Stanovení ploch a čar počtem.**

Veškeré body, jichž rovnoběžné souřadnice x, y, z hoví jedné rovnici

$$f(x, y, z) = 0,$$

naplňují plochu (čl. 48.). Tak n. p. jest $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ při pravoúhlých souřadnicích rovnicí kulové plochy opsané kolem počátku souřadnic poloměrem a; lineárná rovnice $Ax + By + Cz + D = 0$ přináleží rovině.

Veškeré body, jichž souřadnice hoví současně dvěma rovnicím

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

nalézají se na obou plochách těmito rovnicemi stanovených, tedy na průsečné čáře obou ploch. Odvodíme-li z těchto dvou rovnic jinou rovnici, hoví jí souřadnice každého bodu průsečné čáry, t. j. odvozená rovnice repraesentuje plochu procházející onou čarou. Tak n. p. odvodíme eliminací x z obou rovnic novou rovnici tvaru

$$\varphi(y, z) = 0,$$

náležející válci o hranách rovnoběžných s osou x a procházejícímu danou čarou; jest totiž patrno, že hodnoty y, z hovící této rovnici vedou k nekonečnému množství bodů (x, y, z), kde x jest libovolné, poslední plochy, a všecky body ty, majíce totéž y a totéž z, naplňují přímku rovnoběžnou s osou x, tak že poslední plocha se jeví jakožto geometrické místo takových přímek, t. j. jakožto válec o hranách rovnoběžných s osou x.

Pokládáme-li poslední rovnici za rovnici čáry v rovině Oyz, jest čára ta patrně stopou vytknutého válce.

Nenalézají-li se veškeré body čáry v jedné rovině, sluje čára prostorovou č. o dvojí křivosti, v opáčném případě rovinnou *).

Rovnice (1) čáry se často nahrazují jinými, jednoduššími; eliminujeme-li z nich jednou z a jednou y, obdržíme rovnice tvaru

$$f_1(x, y) = 0, \quad F_1(x, z) = 0,$$

náležející válcům čarou vedeným o hranách rovnoběžných s osou z, resp. y, a současně projekcím čáry na rovinách Oxy, resp. Oxz stanoveným. Řešením těchto rovnic dle y, resp. z, možno jim dáti tvar

$$y = \lambda(x), \quad z = \mu(x),$$

jenž vede k tomu, že všecky tři souřadnice x, y, z bodu čáry pokládáme za funkce jedné proměnné x:

$$x = x, \quad y = \lambda(x), \quad z = \mu(x).$$

Zavedeme-li jinou neodvisle proměnnou t rovnicí $x = \varphi(t)$, a píšeme-li $\psi(t)$, $\chi(t)$ místo $\lambda[\varphi(t)]$, $\mu[\varphi(t)]$, máme čáru stanovenu rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \tag{2}$$

A naopak stanoví každé rovnice (2) čáru; eliminací t z první a druhé, a pak z první a třetí rovnice obdržíme dvě rovnice mezi x, y, z, ukazující, že body (2) naplňují čáru.

139. **Tečna a normálná rovina čary.**

Tečnou čáry v bodě M (x, y, z) zoveme limitní polohu spojnice bodu M s bodem čáry nekonečně blízkým M′ $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Spojnice MM′ má rovnice

$$Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x), \quad Z - z = \frac{\Delta z}{\Delta x}(X - x),$$

a pro lim $\Delta x = 0$ mají podíly přírůstů za limity podíly diferenciálné, tak že rovnice tečny jsou

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \quad Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x),$$

---

*) První se zabýval soustavně s čarami prostorovými *Clairaut* ve svých „Recherches sur les courbes à double courbure“, 1731, od něhož pochází i jich pojmenování, *Monge* a jiní theorii tu jakož i theorii ploch dále vyvinuli; sr. *Monge*, Applications de l'Analyse à la Géométrie, 2e éd., Paris, 1850.

aneb

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}. \tag{3}$$

Jest-li čára dána rovnicemi (2), máme

$$dx=\varphi'(t)\,dt,\quad dy=\psi'(t)\,dt,\quad dz=\chi'(t)\,dt$$

a rovnice tečny v bodě příslušném hodnotě t jsou

$$\frac{X-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{Y-\psi(t)}{\psi'(t)}=\frac{Z-\chi(t)}{\chi'(t)};$$

při tom ovšem předpokládáme, že pro uvažovanou hodnotu t nevymizí současně derivace $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$.

Dána-li čára rovnicemi (1), máme jich differencováním

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0;$$

odkud, jelikož pro bod X, Y, Z tečny platí úměra (3)

$$dx:dy:dz=X-x:Y-y:Z-z,$$

soudíme, že bod ten hoví rovnicím

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\dfrac{\partial f}{\partial t}(Z-z)=0,\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\dfrac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\dfrac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0,\end{cases} \tag{4}$$

t. j. že toto jsou rovnice tečny; jest každá z těchto rovnic vzhledem k běžným souřadnicím lineárná, tedy rovnicí roviny, a obě stanoví společnou přímku rovin, tečnu. Ovšem supponujeme, že se tyto dvě roviny nestotožní, t. j. že neplatí proporce

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial z};$$

v případě takovém by uvažovaný bod x, y, z byl obecně zvláštním bodem dané čáry, k čemuž zde jen budiž poukázáno.

Rovina, vedená bodem čáry kolmo k jeho tečně, sluje rovinou normálnou. Úhly α, β, γ, jež uzavírá tečna s pravoúhlými osami souřadnými, jsou vzhledem k (3) stanoveny proporcí

$$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=dx:dy:dz;$$

a jelikož rovina bodem (x, y, z) vedená kolmo k směru (α, β, γ) má rovnici

$$(X - x)\cos\alpha + (Y - y)\cos\beta + (Z - z)\cos\gamma = 0,$$

jest rovnice normálné roviny:

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0.$$

Vzhledem k hořejší proporci a k relaci $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ máme

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{\pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{dz}{\pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

aneb, dělíce čítatel i jmenovatel dt,

$$\cos\alpha = \frac{\varphi'}{\pm\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\psi'}{\pm\sqrt{\varphi'^2 + \varphi'^2 + \chi'^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{X'}{\pm\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}},$$

kde znamení ve jmenovatelích si korrespondují; nalézáme dva systémy úhlů α, β, γ, příslušné dvěma opáčným směrům tečny.

140. **Tečná rovina a normála plochy.**

Vedeme-li na dané ploše daným bodem libovolné čáry, jsou jich tečny v tomto bodě sestrojené vesměs v určité rovině, která sluje tečnou rovinou plochy v onom bodě.

Budiž

$$f(x, y, z) = 0$$

rovnice dané plochy a M (x, y, z) daný bod její; bodem tím veďme libovolnou plochu

$$F(x, y, z) = 0,$$

jejíž průsečnou čáru s danou plochou repraesentují tyto dvě rovnice, t. j. libovolnou čáru na první ploše bodem M vedenou. Tečna k této čáře sestrojená má rovnice (4), z nichž první ukazuje, že — nechť jest plocha $F = 0$ jakákoli — stanovená tečna se vždy nalézá v rovině

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0, \tag{5}$$

čímž výrok dokázán, ovšem za supposice, že v uvažovaném bodě

M (x, y, z) nevymizí současně všecky tři parciálné derivace funkce $f(x, y, z)$, kdy rovina tečná by byla neurčitou. Rovnice (5) jest rovnicí tečné roviny plochy $f = 0$.

Přímka vedená daným bodem plochy kolmo k tečné rovině její sluje normálou plochy; její rovnice tedy jsou

$$\frac{X - y}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{6}$$

Dána-li plocha rovnicí tvaru

$$z = \varphi(x, y),$$

možno psáti

$$f = \varphi(x, y) - z = 0,$$

a pak

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -1;$$

rovnice tečné roviny (5) jest tedy

$$\frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y) - (Z - z) = 0,$$

aneb, píšeme-li opět p, q místo $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$,

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \tag{7}$$

Rovnice (6) normály jsou nyní

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

aneb

$$\begin{cases} X - x + p(Z - z) = 0, \\ Y - y + q(Z - z) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

U *kulové plochy* n. p.

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

jsou parciálné derivace levé strany resp. $2x, 2y, 2z$, a tedy rovnice (5) tečné roviny v bodě (x, y, z):

$$x(X - x) + y(Y - y) + z(Z - z) = 0,$$

čili

$$xX + yY + zZ - a^2 = 0.$$

Rovnice (6) normály jsou

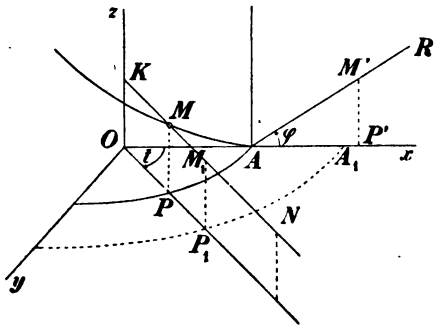
$$\frac{X - x}{x} = \frac{Y - y}{y} = \frac{Z - z}{z},$$

čili

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

a z nich patrno, že normála prochází počátkem (0, 0, 0), t. j. středem koule.

Jakožto druhý příklad uvažujme *šroubovici na rotačním válci*, t. j. čáru na přímém kruhovém válci sestrojenou tím způsobem, že nanášíme na hrany od základny délky $\overline{PM}$ úměrné oblouku AP základné kružnice; koncové body M těchto délek naplní čáru nazvanou šroubovicí (obr. 37.).



Obr. 37.

Osa válce zvolena za osu z, a rovina základny za rovinu xy pravoúhlé soustavy souřadné.

(Rozvineme-li válcovou plochu do roviny xz počínajíce hranou bodem A vedenou, rozvine se kružnice AP do přímky AP', a přímka PM do polohy P'M'; poněvadž dle definice šroubové čáry platí

$$\overline{PM} = m \text{ arc } AP$$

čili $$\overline{PM} = m\,\overline{AP'},$$

kde m jest stálý faktor úměrnosti, naplní bod M' přímku AR, t. j. šroubovice přejde rozvinutím do přímky, a zároveň patrno, že

$$m = \operatorname{tg} \varphi,$$

značíme-li φ sklon této přímky s osou x.)

Zavedeme-li úhel $AOP = t$ jakožto neodvisle proměnnou a označíme-li a poloměr válce, máme pro souřadnice bodu M šroubovice výrazy

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = mat; \tag{9}$$

nabývá-li t všech hodnot od $-\infty$ do ∞, podávají tyto výrazy všecky body šroubovice. Body příslušné hodnotám t intervallu $(t_0 \ldots t_0 + 2\pi)$ naplní část šroubovice, která sluje jedním závitem jejím; část ta se patrně promítá do celé základné kružnice a výška její, t. j. rozdíl mezi největším a nejmenším z, jest patrně $ma\,2\pi$, výška to závitu. Každé dva závity jsou shodné; zá-

vit, daný intervallem $(t_1 \,..\, t_1 + 2\pi)$, přejde totiž do předchozího závitu, otočíme-li jej kolem osy z o úhel $t_0 - t_1$ a pak pošineme ve směru osy z o délku $mat_0 - mat_1$.

Z rovnic (9) plynou differenciály

$$dx = -a \sin t\, dt, \quad dy = a \cos t\, dt, \quad dz = ma\, dt,$$

a tedy jsou dle (3) rovnice tečny šroubovice

$$\frac{X - x}{-\sin t} = \frac{Y - y}{\cos t} = \frac{Z - z}{m}.$$

Značíme-li α, β, γ úhly tečny s osami, máme tedy

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = -\sin t : \cos t : m,$$

z čehož

$$\cos\gamma = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

t. j. sklon tečny s osou válce jest stálý a s. $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

Jakožto třetí příklad uvažujme *přímou plochu šroubovou*; ona jest geometrickým místem přímek vedených body šroubovice kolmo k ose válce č. k ose její. Jest-li tedy MK kolmá k Oz (obr. 37.) a tedy rovnoběžná s OP, jest MK plošnou přímkou přímé plochy šroubové procházející danou šroubovicí. Pro libovolný bod N(X, Y, Z) této přímky patrně platí

$$Z = z, \quad \frac{Y}{X} = \frac{y}{x},$$

čili

$$Z = amt, \quad \frac{Y}{X} = \operatorname{tg} t;$$

eliminací t z těchto rovnic obdržíme rovnici přímé plochy šroubové

$$Y = X \operatorname{tg}\frac{Z}{am}.$$

Omezíme-li se na půl závitu příslušného hodnotám t intervallu $\left(-\frac{\pi}{2} \,..\, \frac{\pi}{2}\right)$, můžeme eliminaci tu tak provésti, že píšeme

$$t = \operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X},$$

a tedy rovnici plochy šroubové

$$Z = am \operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}.$$

Z rovnice $y = x \operatorname{tg} \frac{z}{am}$ máme derivace

$$p = -\frac{amy}{x^2 + y^2}, \quad q = \frac{amx}{x^2 + y^2},$$

a rovnici roviny tečné:

$$Z - z = -\frac{amy}{x^2 + y^2}(X - x) + \frac{amx}{x^2 + y^2}(Y - y).$$

Značíme-li α, β, γ úhly normály s osami, platí

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = -\frac{amy}{x^2 + y^2} : \frac{amx}{x^2 + y^2} : -1,$$

z čehož

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{\frac{a^2 m^2}{x^2 + y^2} + 1}}.$$

Závisí tedy γ jen na $x^2 + y^2$, t. j. na vzdálenosti bodu dotyčného od osy z. Body plochy, jež mají od osy z stejnou vzdálenost, naplňují šroubovici; body ty jsou patrně na válci rotačním, a značí-li a_1 onu vzdálenost, hoví jich souřadnice rovnicím

$$y = x \operatorname{tg} \frac{z}{am},$$
$$x^2 + y^2 = a_1^2.$$

Položíme-li tedy $x = a_1 \cos t$, $y = a_1 \sin t$, máme

$$\operatorname{tg} t = \operatorname{tg} \frac{z}{am} \text{ čili } t = \frac{z}{am},$$

tak že, píšíce m_1 místo $\frac{am}{a_1}$, máme pro každý bod oné čáry

$$x = a_1 \cos t, \quad y = a_1 \sin t, \quad z = a_1 m_1 t,$$

čímž patrno, že to jest šroubovice, jejíž rozvinutí tvoří s osou x sklon φ_1, daný rovnicí $\operatorname{tg}\varphi_1 = m_1 = \frac{am}{a_1}$; sklon ten jest tedy tím menší, čím větší jest vzdálenost a_1.

141. **Differenciál oblouku libovolné čáry.**

Především nutno definovati délku oblouku čáry CD (obr. 38.), stanovené vzhledem k pravoúhlým osám souřadným Ox, Oy, Oz. Za tím účelem zvolme jako u čáry rovinné (čl. 125.) na tomto oblouku $n - 1$ bod, čímž oblouk rozdělen na n částí.

Spojíme-li každé dva sousední z těchto bodů, obdržíme lomenou čáru, vepsanou do oblouku CD, jejíž obvod označme Π, píšíce jej ve tvaru součtu

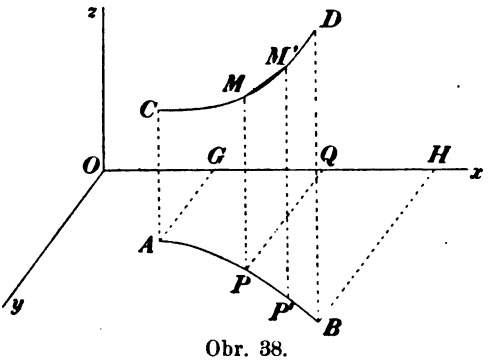
$$\cdot \Pi = \Sigma \overline{MM'},$$

při čemž M značí kterýkoli z oněch bodů, M' pak bod následující.

Roste-li počet stran lomené čáry do nekonečna a blíží-li se délka každé strany nulle, t. j. jest-li $\lim n = \infty$, $\lim \overline{MM'} = 0$, *tu se blíží* Π *určité limitě, nechť jest způsob dělení daného oblouku na n částí jakýkoli; tuto limitu*

$$S = \lim_{n = \infty} \Pi$$

nazýváme délkou oblouku CD.



Obr. 38.

Vzdálenost bodu $M(x, y, z)$ od bodu $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ jest

$$\overline{MM'} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2};$$

souřadnice y, z možno pokládati za dané funkce proměnné x, a máme tudíž pro $\lim \Delta x = 0$:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \quad \lim \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx},$$

$$\lim \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

což možno psáti

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \varepsilon,$$

$$\lim \varepsilon = 0.$$

Tím nabýváme

$$\Pi = \Sigma \overline{MM'} = \Sigma \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \Sigma \varepsilon \Delta x.$$

Značí-li ε_0 číselný obnos oné hodnoty ε, která jest číselně největší, jest patrně $\Sigma \varepsilon \Delta x$ číselně menší než $\Sigma \varepsilon_0 \Delta x$ čili $\varepsilon_0 \Sigma \Delta x$ t. j. než $\varepsilon_0 \overline{GH}$; a poněvadž $\lim \varepsilon_0 = 0$, soudíme, že

$$\lim \Sigma \varepsilon \Delta x = 0.$$

Máme tedy

$$\lim \Pi = \lim \Sigma \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

při čemž odmocnina na pravo jest jistou funkcí $\varphi(x)$ proměnné x.

Sestrojme v pomocné rovině dvou pravoúhlých os x, Y čáru o rovnici $Y = \varphi(x)$ a vytkněme plochu S omezenou touto čarou, osou úseček a pořadnicemi příslušnými úsečkám $x_0 = \overline{OG}$ a $x_1 = OH$; plocha S jest dána jakožto limita (čl. 59.)*).

$$S = \lim \Sigma Y \Delta x = \lim \Pi.$$

Poněvadž první limita dle citovaného článku jest nezávislá na velikosti přírůstů Δx, jest hořejší výrok dokázán; zároveň jest zjevno, že délka S oblouku CD jest vyjádřena týmž číslem jako plocha rovinná, právě vymezená.

Označíme-li délku oblouku CM sahajícího až k bodu M o úsečce x, literou s, bude s vyjadřovati také plochu v pomocné rovině omezenou čarou $Y = \varphi(x)$, osou x a pořadnicemi příslušnými úsečkám x_0 a x; dle čl. 124. jest derivace této plochy s dle úsečky x rovna pořadnici Y této úsečce příslušné, t. j.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

z čehož *differenciál oblouku libovolné čáry*:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{10}$$

Nyní snadno vychází správnost výroku často užívaného:

Limita podílu nekonečně malého oblouku libovolné čáry a příslušné tětivy jest 1.

Máme skutečně

$$\lim \frac{\text{arc } MM'}{\overline{MM'}} = \lim \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

$$= \lim \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = 1.$$

Věty té možno s prospěchem užiti n. p. při odvození differenciálu oblouku v případě jiných než pravoúhlých souřadnic.

*) V cit. článku učiněna supposice, že $f(x)$ jest rostoucí a kladná, za účelem stručnější stylisace; supposice ta ale není patrně nutná k odvození výrazu limitního pro plochu.

Jsou-li x, y, z n. p. souřadnice kosoúhlé, a označíme-li α, β, γ úhly os souřadných

$$\alpha = y\mathrm{O}z, \quad \beta = z\mathrm{O}x, \quad \gamma = x\mathrm{O}y,$$

máme vzhledem k větě I. čl. 59.

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim \frac{\overline{\mathrm{MM}'}}{\Delta x} = \lim \Big[1 + \Big(\frac{\Delta y}{\Delta x}\Big)^2 + \Big(\frac{\Delta z}{\Delta x}\Big)^2 + 2\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta z}{\Delta x}\cos\alpha + 2\frac{\Delta z}{\Delta x}\cos\beta + 2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cos\gamma\Big]^{\frac{1}{2}},$$

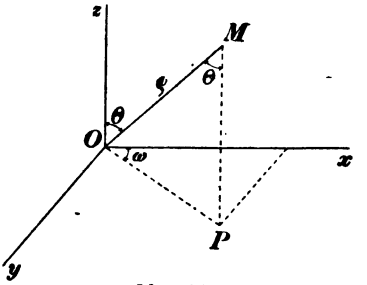
t. j.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\Big[1 + \Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 + \Big(\frac{dz}{dy}\Big)^2 + 2\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\cos\alpha + 2\frac{dz}{dx}\cos\beta + 2\frac{dy}{dx}\cos\gamma\Big]},$$

z čehož konečně

$$(11) \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dy\,dz\cos\alpha + 2dz\,dx\cos\beta + 2dx\,dy\cos\gamma}.$$

Užíváme-li polárných souřadnic prostorových ϱ, ϑ, ω, stanovíme, vycházejíce z tří os pravoúhlých $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$ (obr. 39.), libovolný bod $\mathrm{M}(x, y, z)$ délkou průvodiče $\overline{\mathrm{OM}} = \varrho$, sklonem ϑ jeho s kladnou osou z a odchylkou ω roviny $z\mathrm{OM}$ od roviny $z\mathrm{O}x$. K vyčerpání všech bodů M prostoru stačí bráti úhel ϑ v mezích 0 a π, úhel ω v mezích 0 a 2π, a ϱ vždy kladně.



Obr. 39.

Pravoúhlé souřadnice x, y, z bodu M jsou s polárnými jeho souřadnicemi patrně vázány formulemi

$$x = \varrho \sin\vartheta \cos\omega, \quad y = \varrho \sin\vartheta \sin\omega, \quad z = \varrho\cos\vartheta,$$

z nichž differencováním

$$dx = \sin\vartheta\cos\omega\,d\varrho + \varrho\cos\vartheta\cos\omega\,d\vartheta - \varrho\sin\vartheta\sin\omega\,d\omega,$$
$$dy = \sin\vartheta\sin\omega\,d\varrho + \varrho\cos\vartheta\sin\omega\,d\vartheta + \varrho\sin\vartheta\cos\omega\,d\omega,$$
$$dz = \cos\vartheta\,d\varrho - \varrho\sin\vartheta\,d\vartheta,$$

a sečtením čtverců, po krátké redukci,

$$(12) \qquad ds = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2 + \varrho^2 \sin^2\vartheta\,d\omega^2}.$$

Téže formule se snadno doděláme cestou geometrickou.

Přihlédněme k plochám souřadným v soustavě polárné, t. j. k plochám daným resp. rovnicemi

$$\varrho = \text{const.}, \quad \vartheta = \text{const.}, \quad \omega = \text{const.}$$

Plochy první soustavy jsou koule opsané kolem počátku O, plochy druhé soustavy jsou rotační kužele o vrcholu O a ose Oz, plochy třetí soustavy jsou roviny vedené osou Oz. Tyto tři soustavy ploch jsou patrně orthogonálné, t. j. plochy různých soustav se protínají všude pravoúhle č. tak, že jich tečné roviny ve společném bodě sestrojené jsou k sobě kolmy.

Koncovými body oblouku Δs veďme plochy souřadné: dvě kulové plochy o poloměrech ϱ, $\varrho + \Delta\varrho$, dva kužele příslušné úhlům ϑ, $\vartheta + \Delta\vartheta$ a dvě roviny příslušné úhlům ω, $\omega + \Delta\omega$; šest těchto ploch omezí křivoplochý rovnoběžnostěn, jehož jednou úhlopříčnou jest tětiva oblouku Δs. Základna jeho na kouli o poloměru ϱ jest obdélník omezený čtyřmi kruhovými oblouky; dva protější mají délku $\varrho\Delta\vartheta$ a dva ostatní $\varrho \sin\vartheta\, \Delta\omega$, resp. $\varrho \sin(\vartheta + \Delta\vartheta)\, \Delta\omega$, a oblouk Δs se promítá na kouli do úhlopříčné γ onoho obdélníku. Kruhové oblouky $\varrho\,\Delta\vartheta$, $\varrho \sin\vartheta\, \Delta\omega$, γ se různí od svých tětiv o nekonečně malé hodnoty vyššího stupně, mimo to se sklon prvních dvou tětiv odchyluje od pravého úhlu nekonečně málo, tak že máme

$$\gamma^2 = \varrho^2\, \Delta\vartheta^2 + \varrho^2 \sin^2\vartheta\, \Delta\omega^2,$$

zanedbávajíce hodnotu nekonečně malou proti γ^2. Obdobně máme

$$\Delta s^2 = \Delta\varrho^2 + \gamma^2,$$

zanedbávajíce hodnotu nekonečně malou vzhledem k Δs^2; a tedy

$$\frac{\Delta s^2}{\Delta\vartheta^2} + \varepsilon = \frac{\Delta\varrho^2}{\Delta\vartheta^2} + \varrho^2 + \varrho^2 \sin^2\vartheta\, \frac{\Delta\omega^2}{\Delta\vartheta^2},$$

značíme-li ε hodnotu nekonečně malou. V limitě tedy platí

$$\left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^2 = \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 + \varrho^2 + \varrho^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{d\omega}{d\vartheta}\right)^2,$$

čili

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2\, d\vartheta^2 + \varrho^2 \sin^2\vartheta\, d\omega^2,$$

jako nahoře (12).

142. **Směr tečny.**

Značí-li x, y, z pravoúhlé souřadnice bodu M dané čáry a α, β, γ úhly, které uzavírá s kladnými osami tečna v bodě M, tu jsme v čl. 139. nalezli

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = dx : dy : dz.$$

Značí-li s délku oblouku čáry měřenou od libovolného pevného bodu jejího až k bodu M, máme

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

a tedy

$$\frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{1}{ds},$$

z čehož

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds},\quad \cos\beta = \frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}, \tag{13}$$

čili

$$dx = ds\cos\alpha,\quad dy = ds\cos\beta,\quad dz = ds\cos\gamma. \tag{14}$$

V těchto formulích možno $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ vzíti se znamením + neb —, čímž nalézáme oba opáčné směry tečny. Béřeme-li ds kladně, mají $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ táž znamení jako dx, dy, dz a tedy i jako Δx, Δy, Δz při dosti malém $|\Delta t|$.

143. **Oskulační rovina.**

Vedeme-li k dané čáře v bodě M tečnu, touto tečnou a jiným bodem M′ čáry rovinu, *má tato rovina pro případ, že* M′ *se blíží na čáře bodu* M, *určitou limitní polohu, jež sluje rovinou oskulační čáry v bodě* M.

Rovnice tečny MT v bodě M (x, y, z) byly

$$X - x : Y - y : Z - z = dx : dy : dz;$$

rovina bodem M vedená

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0 \tag{15}$$

tudíž prochází onou tečnou, hoví-li této rovnici všecky souřadnice X, Y, Z hovící předchozím proporcím, t. j. platí-li

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0. \tag{16}$$

Rovina (15) prochází mimo to bodem M′ $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, platí-li rovnice

$$a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z = 0.$$

Pokládejme souřadnice bodu dané čáry za funkce neodvisle proměnné t, a buďte t, $t + \Delta t$ hodnoty této proměnné stanovící body M, M′. Dle věty Taylorovy máme

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{x+\vartheta\Delta x}\Delta t^3,$$

čili stručněji

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2 + \mathrm{A}\,\Delta t^3, \\ \Delta y &= \frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2}\Delta t^2 + \mathrm{B}\,\Delta t^3, \\ \Delta z &= \frac{dz}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}\Delta t^2 + \mathrm{C}\,\Delta t^3; \end{aligned} \tag{17}$$

vložením těchto hodnot do poslední rovnice obdržíme přihlížejíce k (16) a krátíce Δt^2,

$$\frac{1}{2}\left(a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2}\right) + (a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C})\,\Delta t = 0.$$

Touto a rovnicí (16) jsou stanoveny poměry $a : b : c$ a tím i rovina (15) vedená MT a bodem M'. Pro lim $\Delta t = 0$ máme

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

čili

$$a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0, \tag{18}$$

a rovnice tato s (16) stanoví hodnoty $a : b : c$ podávající limitní polohu roviny MTM' č. oskulační rovinu. Z (16) a (18) plyne

$$a : b : c = dy\,d^2z - dz\,d^2y : dz\,d^2x - dx\,d^2z : dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

čímž nalézáme rovnici oskulační roviny

$$\begin{aligned} &(dy\,d^2z - dz\,d^2y)\,(\mathrm{X} - x) + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)\,(\mathrm{Y} - y) \\ &\quad + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,(\mathrm{Z} - z) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Vyznačíme-li funkce x, y, z proměnné t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

máme $dx = \varphi'(t)\,dt$, $d^2x = \varphi''(t)\,dt^2$. atd.; vložením do (18) a krácením hodnotou dt^3 nalézáme rovnici oskulační roviny ve tvaru

$$\begin{aligned} &(\psi'\chi'' - \chi'\psi'')\,(\mathrm{X} - \varphi) + (\chi'\varphi'' - \varphi'\chi'')\,(\mathrm{Y} - \psi) \\ &\quad + (\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')\,(\mathrm{Z} - \chi) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Rovnici (19) možno psáti ve tvaru determinantním

$$\begin{vmatrix} \mathrm{X} - x, & \mathrm{Y} - y, & \mathrm{Z} - z \\ dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

a obdobně rovnici (20).

Limitní poloha roviny vedené daným bodem M *a dvěma dalšími body* M′, M″ *čáry pro případ, že se* M′ *a* M″ *na čáře blíží bodu* M, *jest oskulační rovina v bodě* M.

Přísluší-li body M, M′, M″ resp. hodnotám t, $t + h_1$, $t + h_2$ neodvisle proměnné, prochází rovina

$$aX + bY + cZ + p = 0 \tag{21}$$

bodem M, platí-li rovnost

$$a\varphi(t) + b\psi(t) + c\chi(t) + p = 0;$$

značíme-li levou stranu stručně $F(t)$, tu prochází rovina (21) všemi třemi body M, M′, M″, platí-li tři rovnosti

$$F(t) = 0, \quad F(t + h_1) = 0, \quad F(t + h_2) = 0.$$

Pro $\lim h_1 = 0$, $\lim h_2 = 0$ se tyto tři rovnosti redukují na (čl. 137.)

$$F(t) = 0, \quad F'(t) = 0, \quad F''(t) = 0,$$

t. j. ku stanovení stálých a, b, c. p máme rovnice

$$\begin{aligned} a\varphi + b\psi + c\chi + p &= 0, \\ a\varphi' + b\psi' + c\chi' &= 0, \\ a\varphi'' + b\psi'' + c\chi'' &= 0; \end{aligned}$$

odečtením první od (21) máme limitní rovinu ve tvaru

$$a(X - \varphi) + b(Y - \psi) + c(Z - \chi) = 0,$$

a poslední dvě rovnice podávají pro poměry $a : b : c$ dřívější hodnoty, tak že limitní poloha ta jest dána rovnicí (20), jak bylo dokázati. — Z toho patrno, že oskulační rovina čáry rovinné jest její rovina.

Mezi všemi rovinami bodem M *čáry vedenými jest oskulační rovina ona, která k čáře přiléhá nejtěsněji*, t. j. vzdálenost sousedního bodu $M'(t + \Delta t)$ čáry od libovolné roviny bodem M vedené jest nekonečně malá prvního stupně, od roviny obsahující tečnu MT nekonečně malá druhého stupně, od roviny oskulační třetího stupně, pokládáme-li Δt za nekonečně malou hodnotu základní.

Rovnice roviny bodem $M(x, y, z)$ vedené jest při libovolném a, b, c

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0.$$

aneb v normálném tvaru

$$\frac{a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0;$$

a vzdálenost δ bodu $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ od této roviny jest tedy

$$\delta = \frac{a\,\Delta x + b\,\Delta y + c\,\Delta z}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Vložíme-li za Δx, Δy, Δz jich hodnoty (17), obdržíme

$$\delta = \left[\left(a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt}\right)\Delta t + \frac{1}{2}\left(a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2}\right)\Delta t^2 + (a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C})\,\Delta t^3\right] : \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Jest tedy při obecném a, b, c pro $\lim \Delta t = 0$:

$$\lim \frac{\delta}{\Delta t} = \frac{a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

hodnota konečná, různá od nully, a tedy δ hodnota nekonečně malá prvního stupně; prochází-li však rovnice tečnou MT, tu platí

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

a pak se v δ vyskytuje faktor Δt^2 a obecně jest limita

$$\lim \frac{\delta}{\Delta t^2} = \frac{1}{2}\,\frac{a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

hodnota konečná, různá od nully, t. j. δ jest nekonečně malé druhého stupně.

Jest-li ale konečně daná rovina rovinou oskulační v bodě M, tu platí současně

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$
$$a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0,$$

a pak

$$\delta = \frac{(a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C})\,\Delta t^3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

z čehož

$$\lim \frac{\delta}{\Delta t^3} = \frac{1}{6}\,\frac{a\frac{d^3x}{dt^3} + b\frac{d^3y}{dt^3} + c\frac{d^3z}{dt^3}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

a tedy δ obecně nekonečně malá hodnota třetího stupně.

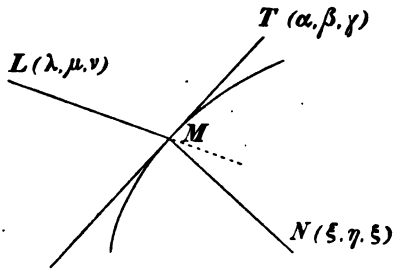
144. **Hlavní normála a binormála.**

Normálou čáry v bodě M nazýváme každou přímku, vedenou bodem M kolmo k tečně MT; veškeré normály v bodě M

naplňují normálnou rovinu tohoto bodu. Z normál jsou význačné dvě: hlavní normála a binormála.

Hlavní normálou nazýváme normálu spadající do oskulační roviny, a binormálou onu, která jest kolmá k oskulační rovině; tečna MT, hlavní normála MN a binormála ML tvoří tedy tři navzájem kolmé přímky (obr. 40.).

Označíme-li směr hlavní normály ξ, η, ζ, a směr binormály λ, μ, ν, máme vzhledem ku rovnici (19) oskulační roviny



Obr. 40.

$$(22)\qquad \frac{\cos\lambda}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{\cos\mu}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{\cos\nu}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} =$$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}},$$

čímž stanoveny oba opáčné směry binormály.

Kolmost hlavní normály k tečně vyjadřuje rovnice

$$dx\cos\xi + dy\cos\eta + dz\cos\zeta = 0,$$

a okolnost, že hlavní normála spadá do oskulační roviny (19), vyjadřuje rovnice

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)\cos\xi + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)\cos\eta + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)\cos\zeta = 0;$$

z těchto dvou vzhledem ku $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ homogenních rovnic plynou jich poměry

$$\cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = A : B : C,$$

kde

$$A = dy(dx\,d^2y - dy\,d^2x) - dz(dz\,d^2x - dx\,d^2z),$$

a B, C z této hodnoty vycházejí cirkulárnou permutací liter x, y, z, t. j. tím, že tyto litery nahradíme resp. y, z, x a tyto pak literami z, x, y.

Vzhledem k

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

z čehož differencováním

$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z,$$

možno A psáti

$$A = dx(dy\,d^2y + dz\,d^2z) - (dy^2 + dz^2)\,d^2x = dx(ds\,d^2s - dx\,d^2x) - (ds^2 - dx^2)\,d^2x = ds(dx\,d^2s - ds\,d^2x),$$

a tedy

$$\cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = d\frac{dx}{ds} : d\frac{dy}{ds} : d\frac{dz}{ds} = d\cos\alpha : d\cos\beta : d\cos\gamma,$$

značíce opět α, β, γ směr tečny.

Tím nalezen směr hlavní normály a dán nejpohodlněji formulemi

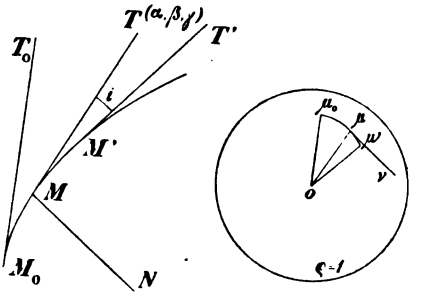
$$\frac{\cos\xi}{d\frac{dx}{ds}} = \frac{\cos\eta}{d\frac{dy}{ds}} = \frac{\cos\zeta}{d\frac{dz}{ds}} = \frac{1}{\pm\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}. \tag{23}$$

Za příčinou úplnosti připomeňme formule (13), podávající směr tečny:

$$\frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz} = \frac{1}{\pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{1}{ds}.$$

145. Křivost čáry, poloměr zakřivení.

Budiž M_0M (obr. 41.) oblouk dané čáry; sestrojme ve všech jeho bodech tečny $M_0T_0, \ldots MT$, a s. vytkněme určitý směr jich tím způsobem, že se týž shoduje se směrem přímky směřující od bodu dotyčného k bodu čáry nekonečně blízkému, však od M_0 vzdálenějšímu. V pomocné kulové ploše opsané třeba kolem počátku O poloměrem 1 veďme ku všem těmto tečnám rovnoběžné poloměry $O\mu_0, \ldots O\mu$. *Koncové body* $\mu_0, \ldots \mu$ *těchto poloměrů naplní sférickou čáru, jejíž oblouk* arc $\mu_0\mu = \sigma$ *se zove absolutní křivostí oblouku* arc $M_0M = s$ *dané čáry.*



Obr. 41.

Průměrnou křivostí oblouku M_0M *zoveme poměr* $\frac{\sigma}{s}$ *absolutní křivosti k délce jeho. Křivostí čáry v bodě* M *zoveme limitu průměrné křivosti nekonečně malého oblouku* MM', *jehož jeden koncový bod jest* M.

Poloměrem křivosti R

dané čáry v bodě M zoveme poloměr kružnice, jejíž křivost se rovná křivosti čáry v bodě M, a kružnice taková sluje *kružnicí zakřivení*; polohu její vytkneme později.

Pokládáme-li M_0 za bod pevný, M za libovolný bod proměnný na čáře, jsou s a σ proměnné hodnoty, závislé ovšem na proměnné, kterou stanovíme bod M. Dle definice máme pro křivost čáry v bodě M výraz

$$\lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \text{ čili } \frac{d\sigma}{ds},$$

jenž ovšem se rovná křivosti $\frac{1}{R}$ kružnice zakřivení, z čehož

$$R = \frac{ds}{d\sigma}.$$

Differenciál $d\sigma$ sluje též *kontingenčním úhlem* čáry dané v bodě M. Differenciály ds a $d\sigma$ jsou vždy téhož znamení, neboť s rostoucím s roste také σ; R pak jest vždy kladná hodnota.

V případě, kdy daná čára jest rovinná, jest sférická čára $\mu_0\mu$ obloukem největší kružnice na kouli, jímž tedy vyjadřujeme sklon tečen M_0T_0 a MT v míře obloukové; z čehož patrno, že se v tomto případě nynější definice shodují s oněmi, jež jsme podali v čl. 126. pro čáry rovinné.

Ostatně možno i křivost libovolné čáry definovati zcela analogicky jako křivost rovinné čáry. Budiž $\Delta s = \text{arc } MM'$ přírůst oblouku s, a $\Delta\sigma = \text{arc } \mu\mu'$ příslušný přírůst oblouku σ, dále i sklon tečen MT a M'T', tedy $i = \mu O\mu'$, aneb v absolutní míře $i =$ oblouku největší kružnice $\mu\mu'$; pak máme, značíce arc $\mu\mu'$ oblouk sférické čáry,

$$\frac{i}{\Delta\sigma} = \frac{\text{kruhový obl. } \mu\mu'}{\text{arc } \mu\mu'} = \frac{\text{kruhový obl. } \mu\mu'}{\overline{\mu\mu'}} \cdot \frac{\overline{\mu\mu'}}{\text{arc } \mu\mu'},$$

z čehož (čl. 125.)

$$\lim \frac{i}{\Delta\sigma} = 1.$$

Máme tedy

$$\frac{1}{R} = \lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \lim \frac{i}{\Delta s},$$

t. j. *křivost čáry v bodě μ jest limita podílu sklonu tečny v bodě* M *s tečnou v nekonečně blízkém bodě* M' *k délce oblouku* MM'.

146. **Výrazy pro poloměr zakřivení.**

Jsou-li x, y, z pravoúhlé souřadnice bodu M, jest

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Značíme-li stále α, β, γ úhly sevřené tečnou MT a kladnými osami souřadnými, má poloměr v kouli $O\mu$ tytéž sklony s osami; položíme-li střed pomocné koule do počátku O, jsou tedy souřadnice bodu μ patrně $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ a tedy

$$d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}, \tag{24}$$

čímž nabýváme pro poloměr zakřivení výrazu

$$R = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}. \tag{25}$$

Formuli té možno dáti takový tvar, že se v něm vyskytují jen differenciály souřadnic x, y, z; především máme

$$d\cos\alpha = d\frac{dx}{ds} = d\left(dx \cdot \frac{1}{ds}\right) = \frac{d^2x}{ds} - dx\frac{d^2s}{ds^2},$$

$$d\cos\beta = \frac{d^2y}{ds} - dy\frac{d^2s}{ds^2},$$

$$d\cos\gamma = \frac{d^2z}{ds} - dz\frac{d^2s}{ds^2},$$

a tedy

$$d\sigma^2 = \frac{1}{ds^2}[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - 2\frac{d^2s}{ds^3}[dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z] + \left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

čili (čl. 144.)

$$d\sigma^2 = \frac{1}{ds^2}[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - 2\frac{d^2s}{ds^3}\,ds\,d^2s + \left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2 ds^2,$$

$$d\sigma = \frac{1}{ds}\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}. \tag{26}$$

Násobíme-li a dělíme-li hodnotou ds, obdržíme

$$d\sigma = \frac{1}{ds^2}\sqrt{ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - (ds\,d^2s)^2}$$

$$= \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - (dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2}$$

aneb na základě známé totožnosti*)

$$d\sigma = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

Tím nabýváme pro $R = \frac{ds}{d\sigma}$ formule, platné pro jakoukoli neodvisle proměnnou,

$$(27)\quad R = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}.$$

Vezmeme-li speciálně s za neodvisle proměnnou, jest $d^2s = 0$, a výrazy pro kontingenční úhel a poloměr zakřivení se zjednoduší na

$$(28)\quad d\sigma = \frac{1}{ds}\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2},$$

$$(29)\quad R = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}.$$

147. **Souvislost dané čáry se sférickou.**

V čl. 145. jsme sestrojili čáru na kouli o poloměru 1 tím, že jsme k tečnám MT dané čáry vedli rovnoběžné poloměry $O\mu$; poloměry ty naplní kuželovou plochu o vrcholu O. O sférické čáře a o kuželi platí věta:

Tečná rovina kuželové plochy podél hrany $O\mu$ *jest rovnoběžna s oskulační rovinou dané čáry v bodě* M, *a tečna sférické čáry v bodě* μ *jest rovnoběžna s hlavní normálou dané čáry v bodě* M.

Souřadnice bodu μ, klademe-li střed koule do počátku O, byly $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, a tedy se mají směrné cos. tečny $\mu\nu$ sférické čáry k sobě jako

$$d\cos\alpha : d\cos\beta : d\cos\gamma;$$

vzhledem k (24)

$$(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2 = d\sigma^2$$

jsou tedy cos. tečny $\mu\nu$:

$$\frac{d\cos\alpha}{d\sigma},\quad \frac{d\cos\beta}{d\sigma},\quad \frac{d\cos\gamma}{d\sigma};$$

to jsou ale dle formul (23) cos. hlavní normály MN dané čáry, čímž dokázána rovnoběžnost přímek $\mu\nu$ a MN.

---

*) Jest to totožnost

$(a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 = (bc_1 - cb_1)^2 + (ca_1 - ac_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2$.

Tečná rovina kužele prochází přímkami $O\mu$, $\mu\nu$ k nimž jsou přímky MT, resp. MN rovnoběžny; rovina těchto přímek, t. j. oskulační rovina dané čáry v bodě M jest tedy rovnoběžna s tečnou rovinou kužele podél hrany $O\mu$ sestrojenou.

Formule právě vytknuté

$$(30) \qquad \cos\xi = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma}, \quad \cos\eta = \frac{d\cos\beta}{d\sigma}, \quad \cos\zeta = \frac{d\cos\gamma}{d\sigma}$$

možno vzhledem k $R = \frac{ds}{d\sigma}$ psáti ve tvaru mnohdy užitečném

$$(31) \quad \cos\xi = R\frac{d\cos\alpha}{ds}, \quad \cos\eta = R\frac{d\cos\beta}{ds}, \quad \cos\zeta = R\frac{d\cos\gamma}{ds}$$

aneb

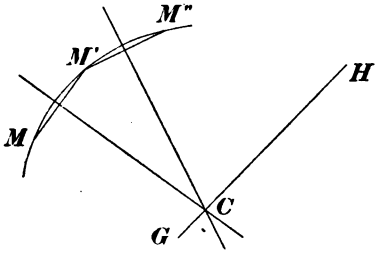
$$\cos\xi = R\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \cos\eta = R\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \cos\zeta = R\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Béřeme-li s za neodvisle proměnnou, tedy ds za stálou, možno je psáti

$$(32) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\cos\xi}{R}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\cos\eta}{R}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\cos\zeta}{R}.$$

148. **Kružnice a střed zakřivení, přímka polárná.**

Buďte na dané čáře vytknuty tři body M, M', M'' a veďme jimi kružnici; blíží-li se na čáře body M', M'' pevnému bodu M, blíží se tato kružnice určité limitní poloze, která se nazývá *kružnicí křivosti* čáry č. *oskulační kružnicí* v bodě M. Poněvadž původní kružnice jest v rovině M, M', M'', jejíž limitní poloha jest oskulační rovina, *jest i kružnice křivosti v rovině oskulační.*



Obr. 42.

Vedeme-li k tětivám MM' a M'M'' kolmé roviny je rozpolující, obsahuje průsečnice GH (obr. 42.) těchto rovin střed sestrojené kružnice. Poněvadž limitní polohy spojnic MM' a M'M'' jsou dvě sousední tečny, jest limitní poloha přímky GH patrně totožna s limitní polohou průsečnice dvou nekonečně blízkých normálných rovin dané čáry. Obdržíme tedy střed kružnice zakřivení čili *střed zakřivení* dané čáry v bodě M jakožto průsečník oskulační roviny, normálné roviny v bodě M a normálné roviny v bodě nekonečně blízkém.

Poloměr kružnice zakřivení č. oskulační se rovná poloměru zakřivení čáry v bodě M.

Jsou-li totiž x, y, z pravoúhlé souřadnice bodu M, a značí-li α, β, γ opět úhly, které tvoří tečna v tomto bodě s kladnými osami, jest rovnice normálné roviny

$$(X - x)\cos\alpha + (Y - y)\cos\beta + (Z - z)\cos\gamma = 0;$$

hodnoty x, y, z, α, β, γ sluší pokládati za funkce jedné proměnné t. Označíme-li vzhledem k tomu levou stranu této rovnice $V(t)$, jest

$$V(t) = 0$$

rovnice normálné roviny v bodě M a

$$V(t + \Delta t) = 0$$

rovnice normálné roviny v bodě M' příslušném hodnotě $t + \Delta t$; oběma rovnicemi jest vytčena průsečná přímka GH. Nahradíme-li druhou z nich rovnicí

$$\frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = 0,$$

vidíme, že limitní poloha přímky GH pro limitu $\Delta t = 0$ jest stanovena rovnicemi

$$V(t) = 0, \quad \frac{dV(t)}{dt} = 0$$

aneb rovnicemi

$$V(t) = 0, \quad dV(t) = 0,$$

kde differencování se vztahuje k proměnné t.

Avšak

$$dV = (X - x)\,d\cos\alpha + (Y - y)\,d\cos\beta + (Z - z)\,d\cos\gamma - \cos\alpha\,dx - \cos\beta\,dy - \cos\gamma\,dz;$$

vzhledem k formulím (13) a (30)

$$dx = \cos\alpha\,ds, \quad dy = \cos\beta\,ds, \quad dz = \cos\gamma\,ds,$$
$$d\cos\alpha = \cos\xi\,d\sigma, \quad d\cos\beta = \cos\eta\,d\sigma, \quad d\cos\gamma = \cos\zeta\,d\sigma,$$

tedy máme

$$dV = [(X - x)\cos\xi + (Y - y)\cos\eta + (Z - z)\cos\zeta]\,d\sigma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\,ds,$$

čili

$$\frac{dV}{d\sigma} = (X - x)\cos\xi + (Y - y)\cos\eta + (Z - z)\cos\zeta - R.$$

Souřadnice X, Y, Z středu křivosti hoví tedy rovnicím

$$(X - x)\cos\alpha + (Y - y)\cos\beta + (Z - z)\cos\gamma = 0,$$
$$(X - x)\cos\lambda + (Y - y)\cos\mu + (Z - z)\cos\nu = 0,$$
$$(X - x)\cos\xi + (Y - y)\cos\eta + (Z - z)\cos\zeta = R,$$

z nichž první jest rovnicí roviny normálné, druhá roviny oskulační a třetí rovnicí právě odvozenou $\frac{dV}{d\sigma} = 0$.

Uvážíme-li, že směry (α, β, γ), (λ, μ, ν), (ξ, η, ζ) jsou navzájem kolmy a že tedy platí mezi nimi známé relace, obdržíme násobením hořejších tří rovnic resp. $\cos\alpha$, $\cos\lambda$, $\cos\xi$, a sečtením

$$X - x = R\cos\xi,$$

a obdobně

$$Y - y = R\cos\eta, \quad Z - z = R\cos\zeta,$$

čili

$$X = x + R\cos\xi, \quad Y = y + R\cos\eta, \quad Z = z + R\cos\zeta,$$

z čehož soudíme, *že přímka vedená od bodu* M *čáry ku středu zakřivení* (X, Y, Z) *má směr* (ξ, η, ζ) *a délku* R, jak bylo dokázati.

Tím nalezen určitý směr (ξ, η, ζ) hlavní normály, jenž byl v čl. 147. formulemi (30) počtářsky definován, způsobem geometrickým: jest to směr přímky směřující od bodu M ku středu zakřivení.

Limitní poloha přímky GH č. stručněji průsečnice normálné roviny v bodě M s normálnou rovinou v bodě nekonečně blízkém jest patrně kolmice vztyčená ve středu zakřivení k rovině oskulační; ona obsahuje všecky póly kružnice zakřivení a sluje *polárnou přímkou* aneb *osou kružnice zakřivení.* Dána jest rovnicemi $V = 0$, $\frac{dV}{d\sigma} = 0$, t. j.

$$(X - x)\cos\alpha + (Y - y)\cos\beta + (Z - z)\cos\gamma = 0,$$
$$(X - x)\cos\xi + (Y - y)\cos\eta + (Z - z)\cos\zeta - R = 0,$$

z nichž první náleží rovině normálné bodu M, a druhá patrně rovině kolmé k hlavní normále a procházející středem zakřivení.

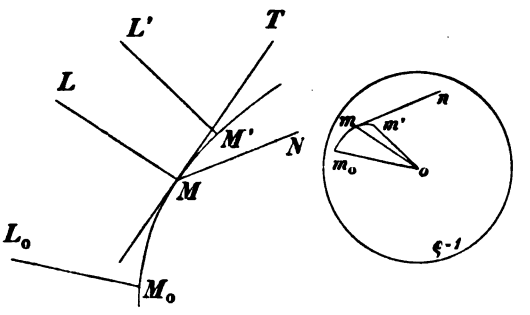
149. **Torse č. druhá křivost.**

Odchylky směru posloupných tečen čáry vedly k pojmu křivosti; kdyby se směr tečny neměnil, tu snadno nahlédneme, že by čára byla přímkou, a jest tedy čára proto křivou, že se směr tečny mění.

Podobně vedou u čar prostorových odchylky směru oskulačních rovin, aneb, což jest totéž, odchylky směru posloupných binormál k pojmu novému, označenému názvem *torse* neb *kroucenosti* neb i *druhé křivosti*; u čáry rovinné jest oskulační rovina ve všech bodech táž, a tedy se směr binormály nemění, a naopak ukážeme (čl. 152.), že čára o stálém směru binormály jest

nutně rovinná, tak že čára jest proto prostorová, č. lépe řečeno nerovinná. že binormála mění svůj směr.

Budiž (obr. 43.) M_0M oblouk dané čáry, $M_0T_0 \ldots MT$ tečny v jeho bodech, jichž směry vytčeny způsobem naznačeným v čl. 145., a $M_0L_0, \ldots ML$ binormály, vedené jedním neb druhým směrem, spadajícím do těchto přímek. V pomocné kouli o poloměru 1 a středu O veďme k těmto binormálám rovnoběžné poloměry $Om_0, \ldots Om$; jich koncové body $m_0, \ldots m$ naplní druhou sférickou čáru, a *délku oblouku* arc $m_0m = \tau$ *této čáry nazýváme torsí n. druhou křivostí oblouku* M_0M *dané čáry.*



Obr. 43.

Průměrnou neb střední torsí oblouku M_0M *zoveme podíl* $\frac{\tau}{s}$ *z absolutní torse a z délky jeho* $s = \text{arc } M_0M$; *konečně torsí dané čáry v bodě* M *nazýváme limitu střední torse nekonečně malého oblouku* MM', *jehož jeden koncový bod jest v* M.

Jest-li tedy M'L' binormála v bodě M' a Om' poloměr rovnoběžný s ní, a klademe-li arc $MM' = \Delta s$, arc $mm' = \Delta\tau$, jest torse v bodě M

$$\lim \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds}.$$

Poloměrem torse T jest poloměr kružnice, jejíž křivost se rovná torsi, tak že

$$\frac{1}{T} = \frac{d\tau}{ds}, \quad T = \frac{ds}{d\tau};$$

hodnota T jest kladná, poněvadž s rostoucím s patrně roste také τ.

Differenciál $d\tau$ oblouku druhé sférické čáry sluje *kontingenčním úhlem vzhledem k druhé křivosti* aneb *úhlem torse.*

Značíme-li j sklon binormál ML a M'L', snadno nahlédneme (čl. 145.), že

$$\lim \frac{j}{\Delta\tau} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{1}{T} = \lim \frac{j}{\Delta s},$$

tak že při limitování možno za úhel torse vzíti sklon sousedních binormál.

Volíme-li za střed O pomocné kulové plochy počátek pravoúhlých souřadnic, jsou souřadnice bodu m

$$\cos\lambda, \quad \cos\mu, \quad \cos\nu,$$

značí-li λ, μ, ν úhly binormály s kladnými osami; jest tedy differenciál oblouku τ tímto bodem vytvořeného

$$d\tau = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}.$$

Hodnoty $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ jsme vyjádřili souřadnicemi x, y, z v čl. 144. a týmž způsobem i ds; možno tedy i T vyjádřiti souřadnicemi, což dole provedeme (čl. 152.) předeslavše t. z. formule Frenetovy.

150. **Vlastnosti obou sférických čar.**

Tečna mn druhé sférické čáry v bodě m jest též rovnoběžna s hlavní normálou dané čáry MN, *a tedy i rovnoběžna s tečnou $\mu\nu$ první sférické čáry v bodě μ*; připomeňme, že body μ a m korrespondují bodu M tím způsobem, že poloměry Oμ, Om jsou resp. rovnoběžny s tečnou MT a s binormálou ML dané čáry.

V čl. 147. jsme již ukázali, že tečná rovina kužele vytvořeného poloměrem Oμ jest rovnoběžna s oskulační rovinou TMN; tečna $\mu\nu$ sférické čáry první jest ovšem kolma k poloměru Oμ a obsažena v tečné rovině kužele, jest tedy rovnoběžna s přímkou kolmou k MT a obsaženou v oskulační rovině čáry, t. j. rovnoběžna s hlavní normálou MN.

Poloměr Om rovnoběžný s binormálou ML opíše druhý kužel, procházející ovšem druhou sférickou čarou m_0m; a poněvadž binormála jest kolma k oskulační rovině, jsou hrany Om tohoto kužele kolmy k tečným rovinám O$\mu\nu$ prvního kužele, t. j. druhý kužel jest supplementární k prvnímu. Z toho ale jde, že i první jest supplementární k druhému; jeví se totiž hrana prvního kužele jakožto průsečnice dvou nekonečně blízkých tečných rovin jeho, k nimž kolmice jsou hrany druhého kužele, stanovicí tečnou rovinu tohoto, z čehož jde kolmost hrany Oμ prvního kužele k tečné rovině Omn druhého.

Tečna $\mu\nu$ jest kolma k poloměru Oμ a k přímce Om, poněvadž tato jest kolma k rovině O$\mu\nu$; jest tedy tečna $\mu\nu$ kolma k rovině Oμm. Obdobně jest tečna druhé sférické čáry mn kolma k poloměru Om a k přímce Oμ, poněvadž tato jest kolma k ro-

vině Omn; jest tedy tečna mn také kolma k rovině $O\mu m$. Z toho jde, že tečny obou sférických čar $\mu\nu$ a mn jsou rovnoběžny.

Směr MT tečny byl (čl. 145.) určitě definován jakožto směr, v němž oblouku $s = \text{arc } M_0M$ přibývá, a týž směr má poloměr $O\mu$; jeho koncový bod μ vytvoří první sférickou čáru, a tečna $\mu\nu$ této čáry ve směru rostoucího oblouku $\sigma = \text{arc } \mu_0\mu$ sestrojená jest rovnoběžna s hlavní normálou MN, jejíž směr jsme (čl. 148.) určitě vytknuli jakožto směr přímky směřující od bodu M ku středu kružnice oskulační. Směr binormály ML jest dosud dvojí, tak že poloměry s ním rovnoběžné v pomocné kouli jsou dva Om a Om_1, jich koncové body m a m_1 vytvoří spojitě dvě sférické čáry, vzhledem ku středu O symmetrické, jichž tečny mn, m_1n_1 v korrespondujících bodech jsou rovnoběžny, ale patrně opáčných směrů; tečny ty orientujeme opět ve směru rostoucího oblouku $\tau = \text{arc } m_0m$, resp. $\tau = \text{arc } m_{01}m_1$. Jedna z těchto tečen má tedy vzhledem k předchozí větě týž směr jako *hlavní normála* MN, řekněme tečna mn čáry m_0m.

Pak prohlásíme směr Om za určitý směr binormály, a s ním souhlasně tedy vedeme binormálu ML*).

Rovnoběžnost tečen $\mu\nu$ a mn vychází také počtem snadno. Máme především relace

$$(33)\qquad \begin{cases} \cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0, \\ \cos\lambda\, d\cos\alpha + \cos\mu\, d\cos\beta + \cos\nu\, d\cos\gamma = 0, \end{cases}$$

které vzhledem k úměře

$$\cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = d\cos\alpha : d\cos\beta : d\cos\gamma$$

prostě vyjadřují, že tečna a binormála jsou kolmy ku hlavní normále. Přihlížejíce k druhé relaci obdržíme differencováním rovnic

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

ihned

$$(34)\qquad \begin{cases} \cos\alpha\, d\cos\lambda + \cos\beta\, d\cos\mu + \cos\gamma\, d\cos\nu = 0, \\ \cos\lambda\, d\cos\lambda + \cos\mu\, d\cos\mu + \cos\nu\, d\cos\nu = 0. \end{cases}$$

Rovnice (33) stanoví poměry $d\cos\alpha : d\cos\beta : d\cos\gamma$, a rovnice (34) poměry $d\cos\lambda : d\cos\mu : d\cos\nu$; poněvadž jsou koefficienty v (33) tytéž jako v (34), jsou i ony poměry stejné, t. j.

$$(35)\qquad \frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha} = \frac{d\cos\mu}{d\cos\beta} = \frac{d\cos\nu}{d\cos\gamma},$$

*) O vzájemné poloze tří přímek MT, MN, ML tak definovaných sr. auktorovu „Notiz zur Theorie der Raumcurven", Monatshefte für Math. u. Physik, 1894.

čímž rovnoběžnost tečen obou sférických čar dokázána; jsouť totiž cos. úhlů tečny $\mu\nu$ úměrny $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$ a úhlů tečny mn úměrny $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$.

Za učiněné volby směru binormály se směr (ξ, η, ζ) hlavní normály shoduje se směry obou tečen $u\nu$ a mn, t. j. platí formule

$$\cos\xi = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma} = \frac{d\cos\lambda}{d\tau},$$

$$\cos\eta = \frac{d\cos\beta}{d\sigma} = \frac{d\cos\mu}{d\tau},$$

$$\cos\zeta = \frac{d\cos\gamma}{d\sigma} = \frac{d\cos\nu}{d\tau},$$

z nichž patrno, že poměry v (35) jsou kladné, majíce hodnotu $\frac{d\tau}{d\sigma}$, tak že

$$(36) \qquad \frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha} = \frac{d\cos\mu}{d\cos\beta} = \frac{d\cos\nu}{d\cos\gamma} = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{R}{T}.$$

151. **Formule Frenetovy.**

Formule ty shrnují a doplňují dosavadní výsledky odvozené o tečně, hlavní normále, binormále, křivosti a torsi.

Značí-li jako dosud x, y, z pravoúhlé souřadnice bodu dané čáry, α, β, γ úhly tečny, ξ, η, ζ úhly hlavní normály, λ, μ, ν úhly binormály s kladnými osami souřadnými, při čemž tyto tři směry vytčeny určitým způsobem, vytknutým v předešlém článku, konečně ds. $d\sigma$, $d\tau$ differenciál oblouku dané čáry, úhel kontingenční a úhel torse, tedy jsme nalezli

$$(37) \quad dx = ds\cos\alpha, \quad dy = ds\cos\beta, \quad dz = ds\cos\gamma,$$

$$(38) \quad d\cos\alpha = \cos\xi\, d\sigma, \quad d\cos\beta = \cos\eta\, d\sigma, \quad d\cos\gamma = \cos\zeta\, d\sigma,$$

$$(39) \quad d\cos\lambda = \cos\xi\, d\tau, \quad d\cos\mu = \cos\eta\, d\tau, \quad d\cos\nu = \cos\zeta\, d\tau.$$

Abychom obdobně vyjádřili differenciály hodnot $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, differencujme relaci

$$\cos^2\xi = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\lambda,$$

jejíž správnost jest patrna vzhledem k tomu, že α, ξ, λ jsou úhly. které uzavírá směr Ox s třemi navzájem kolmými přímkami MT, MN a ML; tím obdržíme

$$\cos\xi\, d\cos\xi = -\cos\alpha\, d\cos\alpha - \cos\lambda\, d\cos\lambda,$$

aneb vzhledem k (38) a (39):

$$d\cos\xi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau.$$

Obdobné dvě relace plynou permutováním liter, čímž máme rovnice

$$(40)\qquad \left|\begin{array}{l} d\cos\xi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau, \\ d\cos\eta = -\cos\beta\, d\sigma - \cos\mu\, d\tau, \\ d\cos\zeta = -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau. \end{array}\right.$$

Formulemi (37), (38), (39) a (40) jsou dx, dy, dz a differenciály devíti cosinů úhlů α, $\beta \ldots \nu$ vyjádřeny týmiž cos. a differenciály ds, $d\sigma$, dt. Ostatně máme

$$(41)\qquad ds = \mathrm{R}\, d\sigma = \mathrm{T}\, d\tau,$$

což dovoluje nahraditi v předchozích formulích $d\sigma$ a $d\tau$ differenciálem oblouku ds za pomoci R a T.

Z rovnic (40) plyne

$$\sqrt{(d\cos\xi)^2 + (d\cos\eta)^2 + (d\cos\zeta)^2} = \sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2};$$

výraz ten možno geometricky vyložiti jakožto differenciál oblouku třetí čáry sférické, jež vzniká na pomocné kouli tím, že vedeme v ní poloměry rovnoběžně s hlavními normálami dané čáry.

Formule v tomto článku vytknuté se označují jako *formule Frenetovy*; že jich možno výhodně užiti při studiu čar, ukážeme některými příklady.

152. **Některé applikace formul Frenetových.**

Na prvním místě applikujme tyto formule na vyjádření poloměru torse T jakožto funkce souřadnic pravoúhlých.

K tomu cíli připomeňme, že směr binormály L (λ, μ, ν) kolmý k směru tečny T (α, β, γ) a k směru hlavní normály N (ξ, η, ζ) jest dán formulemi známými z analytické geometrie prostoru

$$\begin{aligned} \cos\lambda &= \pm(\cos\beta\cos\zeta - \cos\gamma\cos\eta), \\ \cos\mu &= \pm(\cos\gamma\cos\xi - \cos\alpha\cos\zeta), \\ \cos\nu &= \pm(\cos\alpha\cos\eta - \cos\beta\cos\xi), \end{aligned}$$

kde platí na pravo veskrze znamení +, mají-li směry T, N, L touž vzájemnou polohu jako kladné osy x, y, z, a znamení — v případě, kdy mají druhou možnou vzájemnou polohu.

Vzhledem k (37) a (38) tedy máme

$$\begin{aligned} \cos\lambda &= \pm\left(\frac{dy}{ds}\frac{d\cos\gamma}{d\sigma} - \frac{dz}{ds}\frac{d\cos\beta}{d\sigma}\right) \\ &= \pm\frac{1}{ds\,d\sigma}\left(dy\,d\frac{dz}{ds} - dz\,d\frac{dy}{ds}\right) = \pm\frac{1}{ds\,d\sigma}\frac{ds\,(dy\,d^2z - dz\,d^2y)}{ds^2} \\ &= \pm\,\mathrm{R}\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3}, \end{aligned}$$

a obdobné výrazy pro $\cos\mu$, $\cos\nu$, z nichž plyne

$$\frac{ds^3}{R}\cos\lambda = \pm\,(dy\,d^2z - dz\,d^2y),$$
$$\frac{ds^3}{R}\cos\mu = \pm\,(dz\,d^2x - dx\,d^2z),$$
$$\frac{ds^3}{R}\cos\nu = \pm\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x).$$

Differencováním těchto rovnic máme vzhledem k formulím (39) a (41) v předchozím článku,

$$\left(d\frac{ds^3}{R}\right)\cos\lambda + \frac{ds^4}{RT}\cos\xi = \pm\,(dy\,d^3z - dz\,d^3y),$$
$$\left(d\frac{ds^3}{R}\right)\cos\mu + \frac{ds^4}{RT}\cos\eta = \pm\,(dz\,d^3x - dx\,d^3z),$$
$$\left(d\frac{ds^3}{R}\right)\cos\nu + \frac{ds^4}{RT}\cos\zeta = \pm\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x),$$

a násobíme-li tyto rovnice resp. následujícími třemi

$$\frac{ds^2}{R}\cos\xi = ds\,d\sigma\,\frac{d\cos\alpha}{d\sigma} = ds\,d\frac{dx}{ds} = d^2x - \frac{d^2s}{ds}\,dx,$$
$$\frac{ds^2}{R}\cos\eta = d^2y - \frac{d^2s}{ds}\,dy,$$
$$\frac{ds^2}{R}\cos\zeta = d^2z - \frac{d^2s}{ds}\,dz,$$

obdržíme sečtením výsledních rovnic:

$$\frac{ds^6}{R^2T} = \pm\,[(dy\,d^3z - dz\,d^3y)\,d^2x + (dz\,d^3x - dx\,d^3z)\,d^2y + (dx\,d^3y - dy\,d^3x)\,d^2z],$$

z čehož konečně, nahradíme-li $\frac{\Delta s^6}{R^2}$ hodnotou danou formulí (27) v čl. 146.,

(42)
$$T = \pm\frac{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}{(dy\,d^3z - dz\,d^3y)\,d^2x + (dz\,d^3x - dx\,d^3z)\,d^2y + (dx\,d^3y - dy\,d^3x)\,d^2z}$$

kde jmenovatel možno psáti ve tvaru determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} d^2x, & d^2y, & d^2z \\ dx, & dy, & dz \\ d^3x, & d^3y, & d^3z \end{vmatrix}.$$

Ve formuli (42) pro T nutno z dvojího znamení $\pm$ vzíti ovšem ono, jež podává pro T hodnotu kladnou; platí tedy znamení $\pm$ souhlasně s $\Delta \gtrless 0$. Avšak na začátku tohoto článku jsme již upozornili, že platí znamení $\pm$ souhlasně s tím, že směry T, N, L mají neb nemají osovou vzájemnou polohu; *tím vychází, že tečna, hlavní normála a binormála, jichž směry byly v čl.* 150. *přesně definovány, mají neb nemají osovou polohu souhlasně s* $\Delta > 0$ *neb* $\Delta < 0$.

Jest pozoruhodné, že poloměr torse T se jeví jako výraz racionálný v differenciálech souřadnic.

Čáry, jichž torse ve všech bodech jest nullová, t. j. pro něž platí $\frac{1}{T} = 0$, jsou charakterisovány rovnicí $\Delta = 0$; zvolíme-li x za neodvisle proměnnou, máme $d^2x = 0$, $d^3x = 0$ a tato rovnice pak jest

$$d^3y\, d^2z - d^2y\, d^3z = 0,$$

což možno nahraditi rovnicí

$$d\frac{d^2z}{d^2y} = 0,$$

která ukazuje, že podíl $\frac{d^2z}{d^2y}$ se rovná nějaké stálé B, tak že

$$d^2z = \mathrm{B}\, d^2y \quad \text{čili} \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \mathrm{B}\frac{d^2y}{dx^2};$$

derivace hodnot $\frac{dz}{dx}$ a $\mathrm{B}\frac{dy}{dx}$ jsou tedy stejné a tudíž rozdíl oněch hodnot stálý

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{B}\frac{dy}{dx} + \mathrm{A} \quad \text{čili} \quad dz = \mathrm{A}\, dx + \mathrm{B}\, dy.$$

Hodnota z mající týž differenciál jako $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y$ se od této hodnoty různí o stálou, t. j.

$$z = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C},$$

což dokazuje, že čára jest v rovině touto rovnicí stanovené.

Čára o nullové torsi jest tedy rovinná, jakož jsme již v čl. 149. napověděli.

Že čára o nullové křivosti jest nutně přímka, vychází ihned z $d\tau^1 = 0$, čili

$$(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2 = 0,$$

což vymáhá, aby každý differenciál o sobě se rovnal nulle, aby

tedy $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ byly stálé. čili $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dt}{ds}$ byly stálé. Pak ale dělením máme

$$\frac{dx}{dz} = a, \frac{dy}{dz} = b,$$

kde a, b jsou stálé, což možno psáti

$$d(x - az) = 0, \quad d(y - bz) = 0,$$

odkud

$$x - az = a_1, \quad y - bz = b_1,$$

čili

$$x = az + a_1, \quad y = bz + b_1,$$

rovnice přímky.

Jakožto další applikaci podejme důkaz věty *Bertrandovy*: *Čára, v níž poměr obou křivostí jest stálý, jest šroubovice.*

Požadavek

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{T}} = k \text{ čili } \frac{d\tau}{d\sigma} = k,$$

kde k jest onen stálý poměr, můžeme dle formul (36) psáti

$$\frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha} = \frac{d\cos\mu}{d\cos\beta} = \frac{d\cos\nu}{d\cos\gamma} = k,$$

čili

$$d(\cos\lambda - k\cos\alpha) = 0, \quad d(\cos\mu - k\cos\beta) = 0,$$
$$d(\cos\nu - k\cos\gamma) = 0,$$

z čehož soudíme, že

$$\cos\lambda - k\cos\alpha = c_1,$$
$$\cos\mu - k\cos\beta = c_2,$$
$$\cos\nu - k\cos\gamma = c_3,$$

kde c_1, c_2, c_3 značí stálé. Zmocněním a sečtením obdržíme

$$1 + k^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2;$$

můžeme tedy položiti

$$c_1 = \sqrt{1 + k^2}\cos\lambda', \quad c_2 = \sqrt{1 + k^2}\cos\mu',$$
$$c_3 = \sqrt{1 + k^2}\cos\nu',$$

kde λ', μ', ν' značí pevný směr. Tím poslední rovnice možno psáti ve tvaru

$$\cos\lambda = k\cos\alpha + \sqrt{1 + k^2}\cos\lambda',$$
$$\cos\mu = k\cos\beta + \sqrt{1 + k^2}\cos\mu',$$
$$\cos\nu = k\cos\gamma + \sqrt{1 + k^2}\cos\nu'.$$

Sečtením čtverců těchto tří rovnic obdržíme

$$\cos\alpha\cos\lambda' + \cos\beta\cos\mu' + \cos\gamma\cos\nu' = -\frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Uzavírá tedy tečna s jistým pevným směrem (λ', μ', ν') stálý úhel; vedeme-li čarou válec, jehož hrany mají směr (λ', μ', ν'), tu tečna čáry uzavírá s jeho hranami stálý úhel a jest tedy čára šroubovicí, ovšem na válci jinak libovolném.

Není nesnadné dokázati i opak, že totiž u každé šroubovice jest poměr obou křivostí stálý.

Budiž dána šroubovice, t. j. čára na libovolném válci, jejíž tečna uzavírá s jeho hranami stálý úhel. Volme osu Oz rovnoběžně k hranám válce; jest pak úhel γ stálý, a z rovnice

$$\frac{dz}{ds} = \cos\gamma$$

soudíme $d(z - s\cos\gamma) = 0$, a tedy $z - s\cos\gamma =$ stálé; měříme-li oblouk s šroubovice od bodu, v němž proniká rovinu Oxy, jest $s = 0$ při $z = 0$, a tedy ona stálá $= 0$, t. j.

$$z = s\cos\gamma.$$

Vyjádříme-li souřadnice bodu šroubovice jakožto funkce oblouku s, máme obecnou šroubovici stanovenu rovnicemi

$$x = f(s), \quad y = \varphi(s), \quad z = ks,$$

kdež psáno k místo $\cos\gamma$; *vzhledem k*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

jsou funkce f a φ vázány differenciálnou relací

$$f'(s)^2 + \varphi'(s)^2 = 1 - k^2.$$

Směr hlavní normály jest stanoven proporcí

$$\cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = d\frac{dx}{ds} : d\frac{dy}{ds} : d\frac{dz}{ds}$$
$$= \frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2};$$

vzhledem k $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$ soudíme, že $\cos\zeta = 0$, t. j. *že hlavní normála jest kolmá k hraně válce, a tedy i kolmá k válci*, t. j. k jeho tečné rovině.

Binormála jest kolmá k hlavní normále, t. j. k normále válce, a nalézá se tedy v tečné rovině válce, jsouc arci kolma k tečně šroubovice; z toho ale jde ihned, že binormála uzavírá s hranou neb osou z stálý úhel ν, jehož cos jest $\pm\sqrt{1 - k^2}$. Formule Frenetova (40)

$$d\cos\zeta = -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau,$$

č. dělíce ds,

$$\frac{d\cos\zeta}{ds} = -\frac{\cos\gamma}{\mathrm{R}} - \frac{\cos\nu}{\mathrm{T}}$$

tedy podává, vzhledem ku $\cos\zeta = 0$,

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{T}} = -\frac{\cos\gamma}{\cos\nu} = -\frac{k}{\pm\sqrt{1-k^2}},$$

kde ve jmenovateli nutno vzíti znamení minus. Poměr R : T jest tedy u šroubovice v skutku stálý.

Připojme, že také u obecné šroubovice roste z úměrně s délkou s_1 oblouku základní čáry obsažené v rovině Oxy, počítáme-li tuto délku od proniku šroubovice s rovinou Oxy; máme totiž

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2 = [f'(s)^2 + \varphi'(s)^2]\,ds^2 = (1-k^2)\,ds^2$$

a tedy

$$ds_1 = \sqrt{1-k^2}\,ds = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}\,dz,$$

z čehož

$$d\left(z - \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\,s_1\right) = 0;$$

jest tedy rozdíl $z - \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\,s_1$ stálý, a s. nullou, poněvadž pro $z = 0$ také $s_1 = 0$. Tím v skutku nalézáme

$$z = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\,s_1 = s_1 \operatorname{cotg}\gamma.$$

153. Šroubovice na rotačním válci.

Jakožto příklad uvažujme obyčejnou šroubovici, t. j. šroubovici na rotačním válci; souřadnice jejího bodu možno vyjádřiti formulemi (čl. 140.)

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = amt,$$

kde a, m, t mají známý geometrický význam.

Differencováním máme

$$dx = -a\sin t\,dt, \quad dy = a\cos t\,dt, \quad dz = a\,m\,dt,$$

a tedy

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = a\sqrt{1+m^2}\,dt,$$

$$\cos\alpha = -\frac{\sin t}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\cos t}{\sqrt{1+m^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}};$$

tečna svírá tedy s osou z čili s hranami válce stálý úhel γ, jehož cos. jest $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sec\varphi}$ čili $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$, a tedy onen stálý úhel $\frac{\pi}{2}-\varphi$. Označíme-li jej φ_0, máme stručněji

$$\cos\alpha = -\sin\varphi_0 \sin t, \quad \cos\beta = \sin\varphi_0 \cos t, \quad \cos\gamma = \cos\varphi_0. \tag{43}$$

Differencováním těchto rovnic máme

$$\cos\xi\, d\sigma = -\sin\varphi_0 \cos t\, dt,$$
$$\cos\eta\, d\sigma = -\sin\varphi_0 \sin t\, dt,$$
$$\cos\zeta\, d\sigma = 0,$$

odkud sečtením čtverců a odmocněním

$$d\sigma = \sin\varphi_0\, dt \tag{44}$$

a tedy

$$\cos\xi = -\cos t, \quad \cos\eta = -\sin t, \quad \cos\zeta = 0, \tag{45}$$

a dále

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{a \operatorname{cosec}\varphi_0\, dt}{\sin\varphi_0\, dt} = \frac{a}{\sin^2\varphi_0}. \tag{46}$$

Předposlední formule ukazují, že hlavní normála splývá s kolmicí vedenou bodem šroubovice k ose válce, a poslední, že poloměr zakřivení jest stálý; vzhledem k $\mathrm{R}\sin\varphi_0 \sin\varphi_0 = a$ jest jeho sestrojení na snadě.

Differencováním výrazů pro $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ odvozených máme

$$\cos\alpha\, d\sigma + \cos\lambda\, d\tau = -\sin t\, dt,$$
$$\cos\beta\, d\sigma + \cos\mu\, d\tau = \cos t\, dt,$$
$$\cos\gamma\, d\sigma + \cos\nu\, d\tau = 0,$$

odkud vzhledem k (43) a (44)

$$\cos\lambda\, d\tau = -\cos^2\varphi_0 \sin t\, dt,$$
$$\cos\mu\, d\tau = \cos^2\varphi_0 \cos t\, dt,$$
$$\cos\nu\, d\tau = -\cos\varphi_0 \sin\varphi_0\, dt;$$

sečtením čtverců a odmocněním

$$d\tau = \cos\varphi_0\, dt \tag{47}$$

a tudíž

$$\cos\lambda = -\cos\varphi_0 \sin t, \quad \cos\mu = \cos\varphi_0 \cos t, \quad \cos\nu = -\sin\varphi_0, \tag{48}$$

a konečně

$$\mathrm{T} = \frac{ds}{d\tau} = \frac{a}{\sin\varphi_0 \cos\varphi_0}. \tag{49}$$

Předposlední formule ukazují, že tvoří binormála s osou z, čili oskulační rovina se základnou válce stálý úhel, a poslední, že i poloměr torse jest stálý.

Není nesnadné dokázati větu *Puiseux-ovu*, že šroubovice na rotačním válci jest jediná čára, v níž oba poloměry zakřivení jsou stálé*); důkaz ten však pomíjíme, nechtíce tuto kapitolu příliš rozváděti.

---

*) *Seret*, Calcul différentiel, 4e éd., pag. 445.

Kapitola XI.

Theorie křivosti ploch.

154. **Theorém Meusnierův.**

Křivost plochy v daném bodě můžeme posuzovati buď tím, že máme na mysli křivost všech čar oním bodem na ploše vedených, aneb že ji definujeme jakožto veličinu závislou na změně směru tečné roviny neb normály v sousedství uvažovaného bodu. Stanovisko druhé zaujímá *Gauss* svojí *mírou křivosti*, stanovisko první vystihují theorémy *Meusnierův* a *Eulerův*, které nejdříve odvodíme.

Budiž x, y, z bod plochy dané rovnicí

$$z = f(x, y),$$

a označme první a druhé derivace funkce z neodvisle proměnných x, y způsobem již vytknutým

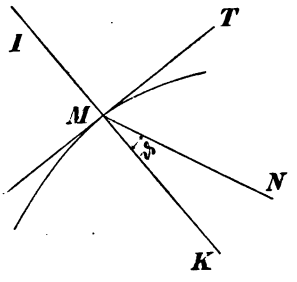
$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

derivace ty pokládáme pro všecky uvažované hodnoty x, y za určité a za spojité. Při tomto označení máme

$$(1) \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} dp = r\,dx + s\,dy, \\ dq = s\,dx + t\,dy. \end{cases}$$

Bodem $M(x, y, z)$ naší plochy buď na ní vedena libovolná čára, jejíž tečna jest MT a hlavní normála MN (obr. 44.), směřující od M ku středu zakřivení; konečně označme IK normálu plochy v bodě M.



Obr. 44.

Sklony tečny MT s kladnými osami označme zase α, β, γ, a sklony

hlavní normály ξ, η, ζ, poloměr zakřivení dané čáry R, a σ totální křivost jejího oblouku AM, měřeného od libovolného bodu A čáry.

Pak $R = \frac{ds}{d\sigma}$ a tedy $ds = R\, d\sigma$, čímž

(3) $\quad dx = R\, d\sigma \cos\alpha,\ dy = R\, d\sigma \cos\beta,\ dz = R\, d\sigma \cos\gamma,$

(4) $\quad d\cos\alpha = d\sigma \cos\xi,\ d\cos\beta = d\sigma \cos\eta,\ d\cos\gamma = d\sigma \cos\zeta.$

Dle čl. 140. mají cos. úhlů sevřených normálou plochy a kladnými osami poměry $-p : -q : 1$, a jsou tedy tyto cos.

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

kde odmocninu možno vzíti s libovolným znamením: volíce však určité znamení, vytkneme určitý směr normály, řekněme třeba MK.

Značí-li ϑ sklon směrů MN a MK, tak že ϑ jest v intervallu $(0 \ldots \pi)$, máme

$$\cos\vartheta = \frac{\cos\zeta - p\cos\xi - q\cos\eta}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

z čehož násobíce $d\sigma$ a přihlížejíce k (4)

(5) $$d\sigma\cos\vartheta = \frac{d\cos\gamma - p\,d\cos\alpha - q\,d\cos\beta}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Úhly α, β, γ jsou vázány tím, že směr tečny MT jest kolmý k směru normály MR, což podává

(6) $$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta;$$

totéž plyne z (1), vložíme-li za dx, dy, dz hodnoty (3), a obdobně plynou z (2) relace

(7) $$\begin{cases} dp = R\, d\sigma(r\cos\alpha + s\cos\beta), \\ dq = R\, d\sigma(s\cos\alpha + t\cos\beta). \end{cases}$$

Differencujeme-li (6) pro přemístění na dané čáře, máme

$$d\cos\gamma = p\,d\cos\alpha + q\,d\cos\beta + \cos\alpha\, dp + \cos\beta\, dq,$$

z čehož, nahradíce dp, dq jich hodnotami (7),

$$d\cos\gamma - p\,d\cos\alpha - q\,d\cos\beta = R\,d\sigma(r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta);$$

vložením této hodnoty do (5) konečné obdržíme

(8) $$\frac{R}{\cos\vartheta} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

Tato pozoruhodná formule ukazuje, že poloměr zakřivení R čáry vedené na dané ploše daným bodem závisí jen na směru její tečny a na sklonu ϑ její hlavní normály a normály plošné; jsou totiž parciálné derivace $p, \ldots t$ v daném bodě plochy určité hodnoty.

Vzhledem k tomu, že R jest kladné, shoduje se znamení $\cos\vartheta$ se znamením pravé strany a jest tedy pro všecky čáry o společné tečně MT totéž, t. j. *hlavní normály všech čar na ploše, dotýkajících se téže tečny, jsou po téže straně tečné roviny.*

Vedeme-li v bodě M oskulační rovinu dané čáry, protne tato plochu v řezu, který má patrně také hlavní normálu MN a tudíž dle (8) týž poloměr zakřivení R jako daná čára. Stačí tedy studovati poloměry zakřivení všech rovinných řezů plochy bodem M vedených.

Veďme tečnou MT normálný řez, t. j. protněme plochu normálnou rovinu TMK, a označme R_0 poloměr zakřivení tohoto řezu; pro tento řez splývá hlavní normála buď s MK neb s MI a jest tedy ϑ buď 0 neb π, tak že (8) podává

$$\frac{R_0}{\pm 1} = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}, \tag{9}$$

a tedy

$$R = \pm R_0 \cos\vartheta, \tag{10}$$

kde na pravo jest znamení $\pm$ souhlasné s $\vartheta \gtrless \frac{\pi}{2}$.

Rovnice (10) vyjadřuje *theorém Meusnierův*:

Poloměr zakřivení čáry, vedené na dané ploše, se rovná součinu z poloměru zakřivení normálného řezu vedeného tečnou čáry a z cosinu úhlu, který tvoří rovina tohoto řezu s oskulační rovinou čáry.

Jeví se tedy R jakožto pravoúhlý průmět délky R_0, tak že patrně platí výrok:

Sestrojíme-li kulovou plochu, jež má společný střed a poloměr s kružnicí křivosti normálného řezu nějaké plochy, protnou roviny, vedené tečnou tohoto řezu, kulovou plochu v malých kruzích, jež budou kružnicemi křivosti řezů plochy oněmi rovinami vytknutých.

Dle této věty stačí prostudovati poloměry křivosti všech normálných řezů plochy daným její bodem vedených, abychom nabyli názoru na poloměry zakřivení všech čar vůbec na ploše onim bodem vedených.

155. **Křivost normálných řezů; theorém Eulerův.**

Poloměr zakřivení R_0 normálného řezu vedeného tečnou o směru (α, β, γ) plochy byl dán formulí (9), v níž R_0 jest hodnota kladná a v níž ve jmenovateli v levo nutno psáti $+1$, shoduje-li se směr hlavní normály tohoto řezu se směrem normály plochy MK určitě voleným, a -1, jsou-li tyto dva směry opáčné.

Učiníme-li tedy sjednání, že značíme literou R poloměr zakřivení normálného řezu vedeného tečnou MT a s. vzatý kladně, resp. záporně, dle toho, shoduje-li se směr hlavní normály řezu se směrem voleným normály plochy neb ne, máme patrně $\pm R_0 = R$ a tedy

$$R = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

Abychom snadněji vyšetřili, jakým způsobem se mění R, zaujímá-li tečna MT všech možných poloh, položme počátek souřadnic do bodu M, t. j. předpokládejme $x = y = z = 0$, a zvolme tečnou rovinu v bodě M za rovinu xy, a tedy normálu plochy za osu z (obr. 45.).

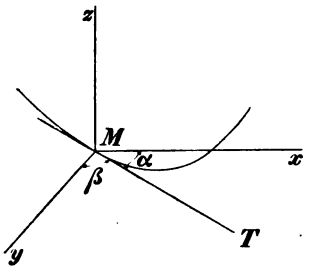
Při této poloze musí rovnice tečné roviny

$$Z = pX + qY$$

přejíti do $Z = 0$, t. j. musí $p = 0$, $q = 0$.

Za směr normály plochy volme n. p. kladnou osu z, t. j. směr o cosinech 0, 0, 1, což vymáhá $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = 1$; pak máme

$$R = \frac{1}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$



Obr. 45.

Tečna MT se nyní nalézá v rovině xy a platí tudíž — omezíme-li se na hodnoty α intervallu $(0 \ldots \pi)$, jimiž všecky tečny vyčerpáme —

$$\cos\beta = \sin\alpha, \quad \gamma = \frac{\pi}{2},$$

čímž

(11)
$$R = \frac{1}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin^2\alpha},$$

aneb, zavedeme-li úhel 2α,

$$R = \frac{1}{\frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2}\cos 2\alpha + s\sin 2\alpha}.$$

Značíme-li $2\alpha_0$ pomocný úhel obsažený v mezích 0 a π a hovící požadavku

$$s = \frac{r-t}{2} \operatorname{tg} 2\alpha_0,$$

a nahradíme-li v poslední formuli s touto hodnotou, obdržíme R ve tvaru

$$R = \frac{1}{\frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2} \frac{\cos 2(\alpha - \alpha_0)}{\cos 2\alpha_0}},$$

aneb vzhledem k

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0} = \frac{\sqrt{s^2 + \left(\frac{r-t}{2}\right)^2}}{\frac{r-t}{2}}$$

do tvaru

$$R = \frac{1}{\frac{r+t}{2} + \sqrt{s^2 + \left(\frac{r-t}{2}\right)^2} \cos 2(\alpha - \alpha_0)}, \tag{12}$$

kde odmocnině $\sqrt{s^2 + \left(\frac{r-t}{2}\right)^2}$ nutno dáti znamení podílu hodnot $\frac{r-t}{2}$ a $\cos 2\alpha_0$.

Formule (12) ukazuje, že R nabývá extremních hodnot pro úhly α činící

$$\cos 2(\alpha - \alpha_0) = \pm 1,$$

t. j. pro úhly

$$\alpha = \alpha_0 + k\frac{\pi}{2},$$

kde k značí číslo celistvé. Avšak dvě hodnoty α lišící se o násobek π dávají touž tečnu MT; jsou tedy hodnotami

$$\alpha = \alpha_0, \quad \alpha = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$$

vyčerpány úhly vedoucí k extremním hodnotám R, a zároveň patrno, že příslušné normálné řezy jsou k sobě kolmy V jednom z těchto řezů jest R maximem, v druhém minimem, jakož ještě shledáme; řezy ty slují *hlavními řezy* plochy v bodě M a jich poloměry R *hlavními poloměry zakřivení* v tomto bodě.

V této úvaze jsme předpokládali, že s a $r - t$ nejsou současně nullami; neboť v případě $s = 0$, $r = t$ není úhel α_0 určen. V tom případě podává formule (11) přímo

$$R = \frac{1}{r},$$

a jsou tedy poloměry zakřivení všech normálných řezů stejné,

tak že možno každé dva k sobě kolmé takové řezy pokládati za hlavní. Bod plochy, pro nějž tento případ nastává, sluje *bodem kruhovým* č. *bodem sférického zakřivení* (ombilic, Kreispunkt, Nabelpunkt).

Za příčinou zjednodušení úvahy volme roviny hlavních řezů za roviny souřadné *zx* a *zy*, tak že $\alpha_0 = 0$ a tedy $s = 0$, čímž (11) přejde do

$$R = \frac{1}{r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha},$$

aneb

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha. \tag{13}$$

Označme R_1, R_2 poloměry zakřivení hlavních řezů rovinami *zx* a *zy* vytknutých; poslední formule pro $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ podává

$$\frac{1}{R_1} = r, \quad \frac{1}{R_2} = t,$$

čímž možno (13) psáti

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2}, \tag{14}$$

což jest *formule Eulerova*; ona vyjadřuje poloměr zakřivení R libovolného řezu normálného pomocí hlavních poloměrů zakřivení R_1, R_2 a pomocí sklonu α roviny řezu R s rovinou řezu R_1.

156. **Průběh hodnot R.**

Přihlédněme k průběhu hodnoty R, mění-li se normálný řez, zaujímaje všech poloh, t. j. nabývá-li α všech hodnot od 0 do π.

Předpokládejme nejprve, že hlavní poloměry zakřivení R_1 a R_2 jsou stejně označeny, t. j. hlavní normály obou hlavních řezů téhož směru; možno pak vždy R_1 a R_2 předpokládati kladné, neb jinak by stačilo zaměniti směr kladné osy *z* za opáčný. Mějme $R_1 < R_2$ a pišme (14)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin^2\alpha.$$

Tu jest patrné, že R má vždy kladné znamení, že tedy všecky normálné řezy a tedy i plocha jest v sousedství uvažovaného bodu po jedné straně tečné roviny č. že jest *vypoukle vypouklá* neb *vydutě vydutá* v onom bodě; dále vidíme, že R roste od minima R_1 do maxima R_2, roste-li α od 0 do $\frac{\pi}{2}$, a že pak mu ubývá od R_2 do R_1, roste-li α od $\frac{\pi}{2}$ do π.

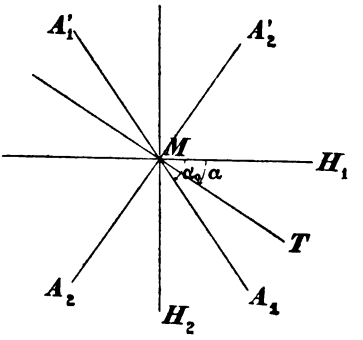
Předpokládejme, za druhé, že R_1 a R_2 jsou různě označeny, třeba R_1 kladně, a položme

$$R_2 = - R_1 \operatorname{tg}^2 \alpha_0,$$

kde pomocný úhel α_0 můžeme předpokládati v mezích 0 a $\frac{\pi}{2}$; tím (14) nabývá tvaru

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha}{R_1 \sin^2 \alpha_0}.$$

Roste-li α od 0 do α_0, t. j. zabírá-li tečna MT (obr. 46.) posloupně polohy MH_1 až MA_1, z nichž první jest stopa hlavního řezu R_1 a druhá stopa řezu vytčená úhlem α_0, tu R roste od R_1 do ∞; roste-li α dále od α_0 do $\frac{\pi}{2}$, t. j. otáčí-li se tečna z polohy MA_1 až do stopy MH_2 druhého hlavního řezu, tu vzhledem k $\sin \alpha > \sin \alpha_0$ jest $\frac{1}{R}$ záporné a s. se mění od 0 do $\frac{1}{R_2}$ čili R od $-\infty$ do R_2.



Obr. 46.

Vzhledem k $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ soudíme, že, roste-li α dále od $\frac{\pi}{2}$ do $\pi - \alpha_0$, poloměr R nabývá záporných hodnot od R_2 do $-\infty$, a roste-li α dále od $\pi - \alpha_0$ do π, poloměr R nabývá kladných hodnot od ∞ do R_1.

Jest tedy R_1 ze všech kladných poloměrů nejmenší, tedy minimem, a R_2 ze všech záporných poloměrů číselně nejmenší, tedy maximem.

Normálné řezy v rovinách, jichž stopy MA_1 a MA_2 na tečné rovině uzavírají se stopou MH_1 prvního hlavního řezu úhly α_0 a $\pi - \alpha_0$, mají poloměry zakřivení $R = \pm \infty$, a tedy nullovou křivost v bodě M č. obecně inflexi v tomto bodě; jich tečny MA_1, MA_2 slují *hlavními tečnami plochy v bodě* M. Normálné řezy, jichž stopy zapadají do úhlu $A_1MA'_2$, mají kladné R, a řezy normálné o stopách v úhlu vedlejším A_1MA_2 záporné R, t. j. část plochy v sousedství bodu M. která se promítá na tečnou rovinu jeho do vrcholových úhlů $A_1MA'_2$ a $A_2MA'_1$ jest po jedné straně tečné roviny, a část promítající se do dvou ostat-

ních vrcholových úhlů A_1MA_2 a $A'_1MA'_2$ po druhé straně, z kteréž příčiny sluje plocha v bodě M *vypoukle vydutou* (à courbures opposées, concav-convex)*).

Ještě k jednomu případu poukažme, kdy totiž jeden z hlavních poloměrů jest nekonečně velký, n. p. R_1; pak (14) podává

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2 \alpha}{R_2},$$

a ukazuje, že R má stálé znamení, mizíc jen pro $\alpha = 0$, a že tedy plocha jest po jedné straně tečné roviny, majíc ráz plochy vypoukle vypouklé**).

Eulerova formule (14) ukazuje, že úhlům α a $\pi - \alpha$ přísluší totéž R, t. j. *dva normálné řezy k hlavním řezům stejně nakloněné mají stejné poloměry zakřivení*, i co do znamení.

Označíme-li R, R' zakřivení dvou normálných řezů k sobě kolmých, tedy příslušných úhlům α, $\alpha + \frac{\pi}{2}$, podává (14)

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R^2},$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin^2 \alpha}{R_1} + \frac{\cos^2 \alpha}{R_2},$$

z čehož

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Poloviční součet křivostí $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ hlavních řezů zove se *průměrnou křivostí* (courbure moyenne) plochy v bodě M, tak že platí výrok:

Průměr křivostí dvou k sobě kolmých řezů normálných jest stálý, rovnaje se průměrné křivosti plochy.

157. **Indikatrix.**

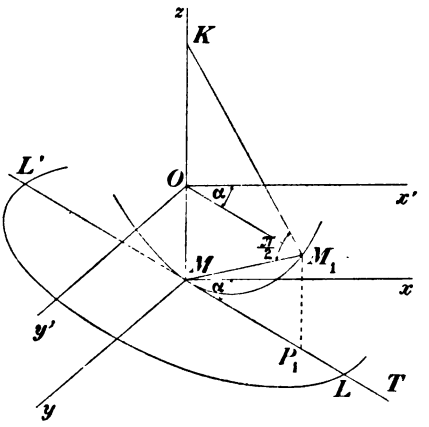
Výsledky, jichž jsme nabyli o křivosti normálných řezů možno cestou geometrickou dle *Dupina* následujícím způsobem odvoditi.

Zvolme opět uvažovaný bod M plochy za počátek pravoúhlých souřadnic, zvolenou normálu plochy za kladnou osu *z* a tečnou roviny za rovinu *xy*.

*) Otočením rovinné čáry kolem osy v její rovině položené vytvořme rotační plochu; je-li čára v bodě M k ose vydutá, jest plocha v tomto bodě patrně vydutě vydutá, je-li ale v něm čára k ose vypouklá, jest v něm plocha vypoukle vydutá.

**) Případ ten nastane n. p. v každém bodě plochy kuželové.

Tečnou MT budiž veden normálný řez zMT, v řezu buď bod M_1 blízký M; vedeme-li MM_1 a k této přímce v rovině řezu kolmici M_1K, prochází kružnice sestrojená v této rovině nad průměrem MK bodem M_1 a dotýká se tečny MT řezu. Blíží-li se bod M_1 na řezu bodu M, blíží se tato kružnice patrně kružnici zakřivení normálného řezu s libovolnou přesností. Jest tedy poloměr zakřivení R tohoto řezu dán formulí



Obr. 47.

$$2R = \lim \overline{MK};$$

avšak

$$\overline{MK} = \overline{MO} + \overline{OK}, \quad \overline{OK} = \frac{\overline{OM_1}^2}{\overline{OM}},$$

čímž

$$2R = \lim \overline{MO} + \lim \frac{\overline{OM_1}^2}{\overline{OM}} = \lim \frac{\overline{OM_1}^2}{\overline{OM}}.$$

Vedeme-li bodem M_1 rovnoběžně s tečnou rovinou Mxy rovinu O$x'y'$, protne tato plochu v jisté čáře procházející bodem M_1; a délka $\overline{OM_1} = u$ se jeví jakožto průvodič bodu M_1 této čáry vzhledem k počátku O. Položíme-li vzdálenost této sečné roviny od roviny tečné $\overline{MO} = z$, máme

$$2R = \lim \frac{u^2}{z},$$

a R vychází kladně neb záporně dle toho, je-li $z > 0$ neb $z < 0$, tedy souhlasné se sjednáním v čl. 155. učiněným.

Označme h libovolnou hodnotu stálou, však téhož znamení jako z, a ustanovme ϱ takové, aby platila rovnost

$$\frac{\varrho^2}{h} = \lim \frac{u^2}{z};$$

pak bude

$$R = \frac{\varrho^2}{2h}.$$

Naneseme-li délku ϱ jakožto průvodič od bodu M na přímku MT činíce $\overline{ML} = \overline{ML'} = \varrho$, jest geometrické místo bodů L, L' pro všecky polohy tečny MT jistá čára nazvaná *indikatrix bodu* M; poslední formule pak ukazuje, že *poloměr zakřivení libovolného normálného řezu jest úměrný čtverci příslušného průvodiče indikatrix.*

Abychom odvodili rovnici indikatrix, uvažme, že rovnici plochy počátkem M procházející $z = f(x, y)$ možno dle věty Mac Laurinovy*) psáti

$$z = f(0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right] + R_3,$$

t. j. v našem případě, kdy $f(0, 0) = 0$, $p = 0$, $q = 0$,

$$z = \tfrac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + R_3. \tag{15}$$

Pokládáme-li z za danou stálou, tedy hoví této rovnici každý bod řezu plochy s rovinou rovnoběžnou k rovině tečné x, y. Klademe-li $\overline{OM_1} = u$, úhel $x'OM_1 = \alpha$, máme pro bod M_1 řezu

$$x = u \cos x, \quad y = u \sin \alpha,$$

a tedy

$$\frac{2z}{u^2} = r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \sin \alpha + t \sin^2 \alpha + \frac{R_3}{u^2},$$

z čehož pro $\lim z = 0$,

$$\frac{1}{R} = r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \sin \alpha + t \sin^2 \alpha,$$

čímž nalezen výraz (11) pro poloměr zakřivení normálného řezu.

---

*) Tento rozvoj jakož i předchozí úvahy se opírají o supponovanou určitost a spojitost funkce $f(x, y)$ a jejích derivací, a jen pak jsou vyvozené geometrické výsledky dokázány; v případě, kdy tomu není tak, mohou poloměry zakřivení normálných řezů se říditi zcela jinými zákony. Jakož n. p. *Serret*, Calc. diff., 4e éd., pag. 470 uvádí, platí pro poloměr zakřivení normálného řezu $y = x \operatorname{tg} \alpha$, v počátku k ploše $z = \frac{x^2 + y^2}{2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$ vedeného, výraz $R = \varphi(\operatorname{tg} \alpha)$, který při libovolnosti funkce φ se neřídí zákony v této kapitole odvozenými. Věc ta nepřekvapí, uváží-li se, že pro $x = 0$, $y = 0$ derivace r, s, t nejsou určité, nýbrž závislé na limitě podílu $\frac{y}{x}$ souřadnic x, y nulle se blížících.

Nahradíme-li $\lim \frac{2z}{u^2}$ stejnou hodnotou $\frac{2h}{\varrho^2}$, máme

$$\frac{2h}{\varrho^2} = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin^2\alpha,$$

jakožto polárnou rovnici indikatrix; a položíme-li x, y na místo $\varrho\cos\alpha$, $\varrho\sin\alpha$, máme její rovnici v souřadnicích pravoúhlých

(16) $$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2h;$$

jest tedy indikatrix kuželosečka o *středu* M.

Je-li $rt - s^2 > 0$, jest tato čára ellipsou a jelikož totožně

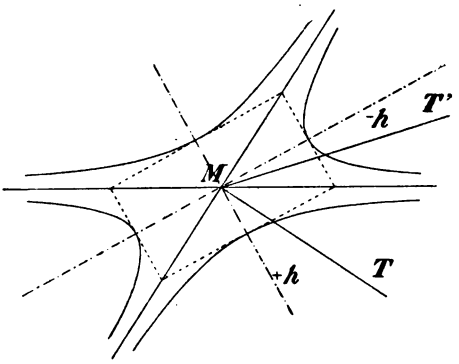
$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = \frac{1}{r}[(rx + sy)^2 + (rt - s^2)y^2],$$

jest patrno, že nutno stálou h voliti stejně označenou s r neb t, a že poloměr zakřivení $R = \frac{\varrho^2}{2h}$ všech řezů normálných má totéž znamení, t. j. *že plocha jest v bodě* M *vypoukle vypouklá.*

Jest-li $rt - s^2 < 0$, skládá se indikatrix ze dvou hyperbol o společných asymptotách a o týchž osách tak sice, že reálná osa jedné jest imaginárnou druhé (obr. 48.); ukazuje totiž napsaná totožnost, že kvadratický výraz $rx^2 + 2sxy + ty^2$ nabývá jak kladných, tak záporných hodnot (čl 116.), a musíme tedy za h zvoliti hodnoty dvě, kladnou a zápornou, čímž rovnice indikatrix jest

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = \pm 2h,$$

náležejíc dvěma v obrazci vyznačeným hyperbolám. Normálné řezy, vedené průvodiči jedné hyperboly, mají poloměr zakřivení téhož označení, a vedené průvodiči druhé, konjugované hyperboly opáčného označení; *plocha jest tedy v bodě* M *vypoukle vydutá.* Normálné řezy, vedené jednou neb druhou asymptotou mají nekonečně velký poloměr zakřivení a *jsou tedy asymptoty indikatrix totožny s hlavními tečnami plochy.*



Obr. 48.

Jest-li konečně $rt - s^2 = 0$, jest rovnice indikatrix

$$\frac{1}{r}(rx + sy)^2 = 2h \text{ čili } rx + sy = \pm\sqrt{2hr},$$

kde h nutno arci voliti stejně označené s r neb t; mají tedy poloměry zakřivení všech normálných řezů totéž označení jako r a t: *plocha jest v bodě* M *vypoukle vypouklá.* Indikatrix se patrně skládá ze dvou rovnoběžných přímek od bodu M stejně vzdálených; normálný řez, vedený průvodičem $rx + sy = 0$ rovnoběžným s nimi má $R = \infty$, a k němu kolmý má patrně minimálný poloměr zakřivení R; plocha má pak v bodě M dvě splývající asymptotické č. hlavní tečny, t. tečnu $rx + sy = 0$.

Uvážíme-li, že poloměr zakřivení libovolného normálného řezu jest $\frac{\varrho^2}{2h}$, tedy úměrný čtverci příslušného průvodiče v indikatrix, vidíme ihned, že osy indikatrix vedou k řezům o maximálném a minimálném R č. k hlavním řezům, a že roviny jejich jsou k sobě kolmy.

Z okolnosti, že průvodiče v ellipse neb v hyperbole k hlavním osám stejně nakloněné mají stejnou délku, soudíme, že normálné řezy k hlavním řezům stejně nakloněné mají stejné poloměry zakřivení, a podobně by plynula i věta o kolmých řezech normálných v článku předchozím odvozená.

Aby bod M byl bodem kruhovým, musí jeho indikatrix míti stejné průvodiče, t. j. *musí býti kružnicí.*

Aby střední křivost byla v bodě M nullová, musí $R_1 + R_2 = 0$, a tedy musí indikatrix se skládati ze dvou konjugovaných *rovnostranných hyperbol.*

Pokládáme-li v rovnici plochy (15) z za stálou, náleží rovnice ta řezu plochy s rovinou $Ox'y'$ rovnoběžnou k tečné rovině bodu M. Přihlížíme-li k nekonečně blízkému okolí bodu M a volíme-li tedy stálé z nekonečně malé, jsou i x, y infinitesimálné hodnoty a rovnici (15) možno, při vypuštění členu R_3 nekonečně malého třetího stupně, psáti

$$2z = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

Čára touto rovnicí stanovená jest patrně podobná k čáře (16) a M jest jich středem podobnosti; *jest tedy indikatrix čára podobná řezu vytvořenému v ploše rovinou, vedenou rovnoběžně s tečnou rovinou bodu* M *a v nekonečně malé vzdálenosti od ní.*

158. **Normálné řezy v obecné poloze.**

V předcházejících úvahách jsme si usnadnili řešení naskytnuvších se úloh tím, že jsme bod M na ploše uvažovaný zvolili za počátek souřadnic, tečnou rovinu za rovinu xy a hlavní řezy za roviny zx a zy. Vytkněme nyní řešení oněch úkolů i v pří-

padě obecném, kdy uvažovaný bod $M(x, y, z)$ má libovolnou polohu.

Vedeme-li bodem M k dané ploše normálný řez tečnou MT o směru (α, β, γ), platila pro poloměr zakřivení řezu formule (čl. 155.)

$$R = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta}. \tag{17}$$

Ze tří úhlů α, β, γ jest jen jeden libovolný, poněvadž jsou vázány dvěma relacemi

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \\ \cos \gamma = p \cos \alpha + q \cos \beta; \end{cases} \tag{18}$$

volíme-li poměr dvou ze tří cosinů, n. p. $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$, jsou všecky tři stanoveny, podávajíce dva opáčné směry, jakož čtenář snadno sám zjistí.

Plocha jest v bodě M vypoukle vypouklá, má-li R totéž znamení pro všecky tečny MT, t. j. má-li jmenovatel

$$\cos^2 \alpha \left(r + 2s \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + t \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \right)$$

stálé znamení při libovolném $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$; to nastane (čl. 157.) při $rt - s^2 \geqq 0$, kdežto při $rt - s^2 < 0$ výraz ten nabývá hodnot různě označených.

Jest tedy při $rt - s^2 \geqq 0$ *plocha v bodě* M *vypoukle vypouklá, při* $rt - s^2 < 0$ *vypoukle vydutá.*

Na druhém místě stanovme *normálný řez v bodě* M *o daném poloměru zakřivení* R.

Jde o stanovení úhlů α, β, γ hovících rovnicím (17) a (18). Přepišme první rovnici (18) pomocí druhé na

$$(1 + p^2) \cos^2 \alpha + 2pq \cos \alpha \cos \beta + (1 + q^2) \cos^2 \beta = 1,$$

a pomocí této (17) na tvar

$$\frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} (r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta) = (1 + p^2) \cos^2 \alpha + 2pq \cos \alpha \cos \beta + (1 + q^2) \cos^2 \beta$$

čili

$$\left(1 + p^2 - \frac{Rr}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) \cos^2 \alpha + 2 \left(pq - \frac{Rs}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) \cos \alpha \cos \beta + \left(1 + q^2 - \frac{Rt}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) \cos^2 \beta = 0; \tag{19}$$

rovnice ta jest vzhledem ku $\cos\alpha$ a $\cos\beta$ homogenní, tak že dělením $\cos^2\alpha$ máme pro podíl $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ kvadratickou rovnici, jejímž řešením, je-li reálné, nalézáme dva normálné řezy o daném poloměru R.

Nyní možno snadno odpověděti k třetí otázce: *kdy jest bod* M *bodem kruhovým?* To vyžaduje, aby poloměr zakřivení všech normálných řezů měl touž hodnotu; musí tedy existovati hodnota R taková, že rovnici (19) jest vyhověno libovolnou hodnotou podílu $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, což vyžaduje, aby rovnice ta byla totožností, t. j. aby platily rovnice

$$1+p^2-\frac{Rr}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0,\quad pq-\frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0,$$
$$1+q^2-\frac{Rt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0.$$

Z nich soudíme, *že kruhový bod jest charakterisován dvěma rovnicemi*

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t};$$

společná hodnota těchto podílů jest pak $\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, a *polovice zakřivení všech normálných řezů*

$$R=\frac{1+p^2}{r}\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Dalším úkolem budiž stanovení hlavních poloměrů zakřivení a hlavních řezů v bodě M.

Kladouce $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\lambda$, můžeme (19) psáti

$$(20)\quad 1+p^2-\frac{Rr}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+2\left(pq-\frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\lambda$$
$$+\left(1+q^2-\frac{Rt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\lambda^2=0$$

čili stručněji

$$\varphi(R,\lambda)=0.$$

Jde nyní o to, ustanoviti λ tak, aby R bylo extremní hodnotou; to ale vymáhá, aby $\frac{dR}{d\lambda}=0$, čili vzhledem k

$$\frac{\partial\varphi}{\partial R}\frac{dR}{d\lambda}+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=0,$$

aby $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0$, t. j. aby λ bylo dvojnásobným kořenem rovnice (20). Rovnice ta má kořen dvojnásobný č. dva stejné kořeny λ při

$$\left(1 + p^2 - \frac{Rr}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)\left(1 + q^2 - \frac{Rt}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) - \left(pq - \frac{Rs}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)^2 = 0$$

čili při

$$(21)\quad (rt - s^2)\,R^2 - [(1 + q^2)\,r - 2pqs + (1 + p^2)\,t]\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,R + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0;$$

kořeny R *této kvadratické rovnice jsou tudíž hlavní poloměry křivosti* R_1, R_2.

Abychom ustanovili polohu hlavních řezů, uvažme, že pro ně platilo $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0$, t. j.

$$pq - \frac{Rs}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \left(1 + q^2 - \frac{Rt}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)\lambda = 0$$

aneb, násobíce $\cos \alpha$,

$$(22)\quad \left(pq - \frac{Rs}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)\cos \alpha + \left(1 + q^2 - \frac{Rt}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)\cos \beta = 0.$$

Kdybychom byli do rovnice (19) zavedli podíl $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ jakožto proměnnou, na níž R závisí, byli bychom zcela obdobně pro hlavní řezy obdrželi

$$(23)\quad \left(1 + p^2 - \frac{Rr}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)\cos \alpha + \left(pq - \frac{Rs}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)\cos \beta = 0.$$

Jak rovnice (22), tak rovnice (23) podává, vložíme-li R_1, resp. R_2 za R, podíl $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$ a tím i směr (α, β, γ) tečny, jíž prochází příslušný hlavní řez.

Pro další úvahy jest s výhodou užiti obou rovnic a přepsati je na

$$\frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta} = \frac{s\cos\alpha + t\cos\beta}{pq\cos\alpha + (1+q^2)\cos\beta} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\mathrm{R}},$$

kde R ovšem značí buď R_1 aneb R_2, a (α, β, γ) směr tečny příslušného hlavního rázu.

Připomeňme ještě výrazy pro součet a součin hlavních poloměrů zakřivení, plynoucí z (21):

$$\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 = \frac{[(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t]\sqrt{1+p^2+q^2}}{rt - s^2},$$

$$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt - s^2}.$$

Konečně podotkněme, že v případě plochy vypoukle vyduté, kdy tedy $rt - s^2 < 0$. snadno obdržíme směry (α, β, γ) hlavních tečen, jakožto ony, pro něž (17) podává $\mathrm{R} = \pm\infty$, tedy z rovnice

$$r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta = 0;$$

ona podává dvě reálné hodnoty pro podíl $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, a každá z nich pak směr jedné hlavní tečny.

159. **Plochy obalující.**

Obsahuje-li rovnice plochy

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \tag{24}$$

jistou stálou, jinak ale libovolnou hodnotu α (parametr), přísluší každé hodnotě její jedna plocha (24); veškeré tyto plochy tvoří tedy soustavu ploch závislých na jednom parametru α.

Plocha soustavy

$$f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0$$

příslušná jiné hodnotě $\alpha + \Delta\alpha$ parametru protne obecně plochu první v čáře, dané oběma rovnicemi, aneb rovnicí (24) a rovnicí

$$\frac{f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0.$$

Pro $\lim \Delta\alpha = 0$ se tedy tato průsečnice blíží čáře dané rovnicí (24) a rovnicí

$$\frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial\alpha} = 0, \tag{25}$$

a na každé ploše (24) soustavy se vyskytne taková limitní čára.

Geometrické místo průsečných čar nekonečně blízkých ploch soustavy sluje obalující plochou (enveloppe) ploch (24), *z nichž každá sluje obalenou plochou (enveloppée)*; proměnlivá čára průsečná dvou nekonečně blízkých ploch soustavy, daná rovnicemi (24) a (25), sluje dle *Monge-a charakteristikou obalující plochy.*

Jest tedy obálka geometrickým místem charakteristik, a rovnici její obdržíme eliminací α z rovnic (24) a (25).

Obalující plocha se dotýká každé obalené plochy ve všech bodech její charakteristiky.

Je-li (x, y, z) bodem plochy nějaké $z = f(x, y)$ a máme-li differencováním

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

jest rovnice tečné roviny v onom bodě

$$Z - z = p\,(X - x) + q\,(Y - y);$$

závisí tedy tečná rovina v daném bodě jen na hodnotách p, q, a mají-li tudíž dvě plochy bodem (x, y, z) procházející týž differenciál dz, mají v něm společnou tečnou rovinu.

Rovnice obalené plochy jest (24), pokládáme-li v ní α za stálou; obdržíme tedy differencováním

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0. \tag{26}$$

Rovnici obalující plochy obdržíme, řešíme-li (25) dle α a vložíme-li toto α, jež se arci jeví jakožto funkce x, y, z, do (24); možno tedy (24) prohlásiti také za rovnici obálky, je-li v něm α funkcí právě vytknutou. Differenciály souřadnic bodu obálky jsou tedy vázány relací

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,d\alpha = 0,$$

která vzhledem k (25) přechází do relace (26). Tím obdržíme jak pro obalenou tak pro obalující plochu v každém bodě charakteristiky totéž dz, čímž věta dokázána.

Uvažujme tři plochy obalené příslušné hodnotám α, $\alpha + h_1$, $\alpha + h_2$ parametru. Společné body těchto tří ploch hoví třem rovnicím

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad f(x, y, z, \alpha + h_1) = 0, \quad f(x, y, z, \alpha + h_2) = 0;$$

limitní polohy těchto bodů pro případ, že $\lim h_1 = 0$, $\lim h_2 = 0$, hoví tudíž (sr. čl. 137.) rovnicím

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 0, \tag{27}$$

a snadno nahlížíme, že týmž rovnicím hoví limitní polohy průsečíků charakteristiky (24), (25) s plochou obalenou

$$f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0.$$

Geometrické místo průsečíků tří nekonečně blízkých ploch obalených sluje čarou úvratu (*arête de rebroussement*) *plochy obalující*; řešením rovnic (27) obdržíme souřadnice x, y, z bodu této čáry jakožto funkce parametru, a první dvě z těchto rovnic ukazují, že každý takový bod se nalézá na jedné charakteristice. Eliminujeme-li α z první a druhé a pak z první a třetí rovnice (27), máme rovnice čáry úvratu v obyčejném tvaru; výsledek první eliminace jest rovnice plochy obalující, a nalézá se tedy čára úvratu ovšem na ní.

Všecky charakteristiky se dotýkají čáry úvratu.

Charakteristika jest vytčena rovnicemi (24) a (25), v nichž α jest stálou; píšeme-li stručně f' místo $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, jsou tedy rovnice charakteristiky

$$f = 0, \quad f' = 0,$$

a jich differencováním obdržíme

$$(28) \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0, \\ \frac{\partial f'}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f'}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f'}{\partial z}\,dz = 0. \end{cases}$$

Eliminujeme-li α z rovnic (27) dvakrát, obdržíme rovnice čáry úvratu; eliminaci tuto si mysleme tak provedenu, že třetí rovnice (27) $f'' = 0$ řešíme dle α, čímž se α objeví jakožto funkce hodnot x, y, z, a že tuto funkci za α vložíme do první a do druhé rovnice (27). Možno tedy rovnice

$$f = 0, \quad f' = 0$$

pokládati za rovnice čáry úvratu, nahradíme-li v nich α funkcí právě vytčenou. Pak z nich differencováním plyne

$$(29) \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,d\alpha = 0, \\ \frac{\partial f'}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f'}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f'}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,d\alpha = 0. \end{cases}$$

Je-li bod (x, y, z) oním bodem charakteristiky, který se nalézá na čáře úvratu, tedy pro něho platí rovnice (27), t. j. $f' = 0$, $f'' = 0$, a poslední dvě rovnice se redukují na (28). Po-

dávají tedy pro takový bod jak rovnice (28) tak (29) tytéž poměry $dx : dy : dz$, t. j. v bodě tom má charakteristika s čarou úvratu společnou tečnu.

160. Plochy rozvinutelné.

Rozvinutelnou (*développable*, *entwickelbar*) *nazýváme plochu, již možno vytvořiti jakožto obalující plochu soustavy rovin závislých na jednom parametru.*

V tomto případě jsou plochy soustavy rovinami

$$ax + by + cz - p = 0, \tag{30}$$

v jichž rovnici koefficienty a, b, c, p jsou dané funkce parametru α.

Charakteristika jest dána rovnicí (30) a rovnicí

$$a'x + b'y + c'z - p' = 0, \tag{31}$$

v níž $a', \ldots p'$ značí derivace $\frac{da}{d\alpha}, \ldots \frac{dp}{d\alpha}$; jest tudíž charakteristika přímkou. Obalující plocha se dotýká obalené roviny ve všech bodech charakteristiky aneb jinak řečeno, obalená rovina se dotýká obalující ve všech bodech č. podél charakteristiky. *Jest tedy rozvinutelná plocha geometrickým místem přímek* (charakteristik) *takovým, že má podél každé přímky jednu tečnou rovinu.*

Body čáry úvratu hoví rovnicím (30), (31) a rovnici

$$a''x + b''y + c''z - p'' = 0, \tag{32}$$

kde $a'', \ldots p''$ značí druhé derivace $\frac{d^2a}{d\alpha^2}, \ldots \frac{d^2p}{d\alpha^2}$. Čáry té se dotýkají všecky charakteristiky, z čehož patrno, *že rozvinutelná plocha jest geometrickým místem tečen jisté čáry*, její čáry úvratu; v čl. 162. ukážeme, že i opak má platnost.

Čára uvratu rozvinutelné plochy se může redukovati na bod; prochází-li totiž rovina soustavy (30) pevným bodem V, prochází jím ovšem také charakteristika, tak že rozvinutelná plocha se jeví jakožto geometrické místo přímek bodem V procházejících č. jakožto plocha kuželová o vrcholu V. Je-li V v nekonečnu, t. j. jsou-li obalené roviny (30) rovnoběžny s danou přímkou P, jsou i všecky charakteristiky s ní rovnoběžny, a plocha rozvinutelná válcem o hranách rovnoběžných s P. V obou případech se čára redukuje na jediný bod V.

Pomíjejíce tyto dva případy, můžeme tvrditi, *že rovina obalená jest oskulační rovinou čáry úvratu.* Souřadnice x, y, z bodu

na čaře úvratu plynou jakožto funkce parametru α řešením rovnic (30), (31) a (32); differencováním rovnice (30) na čáře úvratu máme

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz + (a'x + b'y + c'z - p')\,d\alpha = 0,$$

a vzhledem k (31)

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0. \tag{33}$$

Differencováním rovnice (31) máme

$$\alpha'\,dx + b'\,dy + c'\,dz + (a''x + b''y + c''z - p'')\,d\alpha = 0$$

a vzhledem k (32)

$$a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz = 0. \tag{34}$$

Differencováním (33) obdržíme

$$a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z + (a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz)\,d\alpha = 0,$$

t. j. vzhledem k (34)

$$a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0. \tag{35}$$

Z rovnic (33) a (35) soudíme, že

$$a : b : c = dy\,d^2z - dz\,d^2y : dz\,d^2x - dx\,d^2z : dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

čímž tvrzení dokázáno.

Název ploch rozvinutelných pochází odtud, že je lze applikovati na rovinu, aniž se poruší délky čar na ploše vedených. Nahraďme čáru úvratu lomenou čarou, do ní vepsanou; prodlouží-me-li strany této lomené čáry, obdržíme ploské elementy dvěma přímkami omezené, tvořící plochu polyedrálnou. Otáčením těchto elementů kolem jich společných posloupných hran možno plochu polyedrálnou převésti do roviny, při čemž libovolná čára na ploše narýsovaná přejde do lomené čáry v rovině o téže délce. Stává-li se počet stran lomené čáry, vepsané do oblouku čáry úvratu, nekonečně velkým a každá strana nekonečně malou, blíží se lomená čára na ploše polyedrálné čáře narýsované na ploše rozvinutelné, a lomená čára v rovině jisté čáře, kterou zoveme rozvinutím oné; obě, jak čára na ploše, tak čára rozvinutá, mají stejnou délku.

Je-li (obr. 49.) AB oblouk čáry úvratu dané rozvinutelné plochy, A'M'B' libovolná čára na této ploše daná rovnicí

$$t = \varphi(s),$$

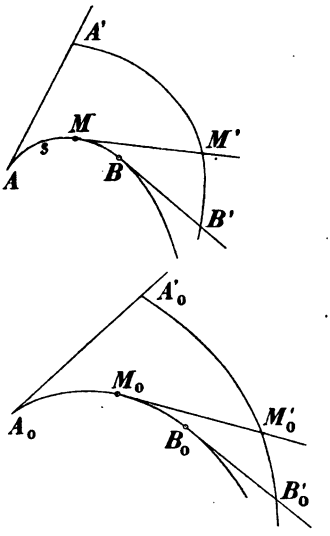
kde t značí délku tečny MM' a s oblouk AM, bude po applikování rozvinutelné plochy do roviny platiti táž rovnice mezi

délkou $M_0M'_0 = t$ a mezi obloukem $A_0M_0 = s$, značí-li $A_0M_0B_0A'_0$.. body v rovině, do nichž body AMBA'.. právě definovaným rozvinutím dospějí.

161. **Sdružené tečny plochy.**

Jest-li $M(x, y, z)$ bod na dané ploše, jímž vedena jest na ploše čára o tečně MT směru (α, β, γ), tu tečné roviny plochy sestrojené v bodech čáry obaluje jistá rozvinutelná plocha; závisí totiž tyto tečné roviny na jednom parametru, třeba na proměnné, jimiž jsou vyjadřeny souřadnice bodu dotyčného.

Plošná přímka této rozvinutelné plochy procházející bodem M, t. j. průsečnice tečné roviny bodu M s tečnou rovinou nekonečně blízkého bodu M' dané čáry sluje dle *Dupina* sdruženou č. konjugovanou tečnou k MT.



Obr. 49.

Sdružené tečny jsou sdruženými průměry v indikatrix bodu M.

Rovina tečné roviny v bodě (x, y, z) plochy má rovnici

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y); \tag{36}$$

v té pokládáme x, y, z a tedy i p, q za funkce jedné proměnné. Differencováním vzhledem k této proměnné, tedy podél dané čáry, obdržíme

$$-dz = -p\,dx - q\,dy + (X - x)\,dp + (Y - y)\,dq$$

čili

$$0 = (X - x)\,dp + (Y - y)\,dq. \tag{37}$$

Rovnicemi (36) a (37) jest stanovena charakteristika plochy obalující, t. j. plošná přímka plochy rozvinutelné. Rovnice ty možno psáti

$$\frac{X - x}{dq} = \frac{Y - y}{-dp} = \frac{Z - z}{p\,dq - q\,dp},$$

tak že směr $(\alpha', \beta', \gamma')$ charakteristiky hoví rovnicím

$$\frac{\cos\alpha'}{dq} = \frac{\cos\beta'}{-dp} = \frac{\cos\gamma'}{p\,dq - q\,dp},$$

čili, nahradíme-li dp a dq jich hodnotami $r\,dx + s\,dy$, $s\,dx + t\,dy$

$$\frac{\cos\alpha'}{s\,dx + t\,dy} = \frac{\cos\beta'}{-(r\,dx + s\,dy)} = \frac{\cos\gamma'}{(ps - qr)\,dx + (pt - qs)\,dy},$$

kde $dx : dy : dz = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$ a kde rovnost třetího zlomku s předchozími dvěma vzhledem ku $\cos\gamma' = p\cos\alpha' + q\cos\beta'$ jest patrna. Abychom snadněji ukázali, že směry (α, β, γ) a $(\alpha', \beta', \gamma')$ jsou sdruženy v indikatrix, předpokládejme, že bod M volen za počátek souřadnic, normála v něm za osu z, a hlavní řezy za roviny zx a zy; pak

$$p = 0,\ q = 0,\ s = 0,\ \gamma = \gamma' = \frac{\pi}{2},\quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha,\quad \beta' = \frac{\pi}{2} - \alpha',$$

a poslední relace podávají

$$\frac{\cos\alpha'}{t\cos\beta} = \frac{\cos\beta'}{-r\cos\alpha},$$

tak že máme mezi α a α' relaci

$$\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\alpha' = -\frac{r}{t};$$

ta ukazuje, že přímky v rovině xy uzavírající s osou x úhly α, α' jsou sdruženými průměry v indikatrix

$$rx^2 + ty^2 = 2h.$$

Algebraický součet poloměrů zakřivení dvou normálných řezů vedených sdruženými tečnami jest stálý.

Dle čl. 157. jsou poloměry zakřivení úměrny čtvercům příslušných průměrů v indikatrix; v ellipse pak jest součet, v hyperbole rozdíl čtverců sdružených průměrů stálý.

Použijme první věty k řešení tohoto úkolu:

Dané ploše jest opsán kužel o vrcholu V, který nechť se jí dotýká podél čáry S; nechť se sestrojí tečna této čáry v libovolném jejím bodě M.

Rozvinutelnou plochou opsanou dané ploše podél čáry S jest vytčený kužel, a tedy MV plošnou přímkou její; tečna MT k čáře S jest tedy konjugovaný průměr k MV v indikatrix bodu M. Je-li daná plocha speciálně kvadratická, jest indikatrix bodu M kuželosečka podobná a podobně položená s každým řezem plochy rovnoběžným s tečnou rovinou v M; speciálněji při přímočaré ploše druhého stupně jsou asymptoty indikatrix obě plošné přímky bodem M procházející, a tedy MV a MT k nim harmonické.

162. **Přímočaré plochy: zborcené a rozvinutelné.**

Závisí-li přímka

$$\begin{cases} x = az + \alpha, \\ y = bz + \beta, \end{cases} \tag{38}$$

na jednom parametru, t. j. jsou-li hodnoty a, b, α, β dané funkce parametru t, jest geometrickým místem všech těchto přímek plocha nazvaná *přímočarou* (surface réglée, Regelfläche), a její rovnici obdržíme eliminací parametru t z rovnic (38). Plocha přímočará může býti *rozvinutelnou*, není-li rozvinutelnou, sluje *zborcenou* (gauche, windschief).

Aby plocha naplněná přímkami (38) byla rozvinutelnou, musí funkce a, b, α, β parametru t hověti jisté relaci, kterou snadno odvodíme. V případě tom možno přímku (38), t. j. přímku o rovnicích

$$x - az - \alpha = 0, \quad y - bz - \beta = 0$$

pokládati za charakteristiku obalené roviny; rovnice této roviny, přímkou ovšem procházející, budiž

$$x - az - \alpha + \lambda (y - bz - \beta) = 0, \tag{39}$$

kde λ závisí též na parametru. Differencováním dle parametru obdržíme rovnici

$$-z\,da - d\alpha + \lambda (-z\,db - d\beta) + (y - bz - \beta)\,d\lambda = 0 \tag{40}$$

stanovící s (39) charakteristiku; toť ale má býti přímka (38), t. j. souřadnice x, y, z hovící (38) mají také hověti (39) a (40), t. j. mají hověti rovnici

$$-z\,da - d\alpha + \lambda (-z\,db - d\beta) = 0.$$

Pro body x, y, z přímky (38) jest však z libovolné, tedy má i poslední rovnice platiti při libovolném z, t. j. mají platiti rovnice dvě

$$da + \lambda\,db = 0, \quad d\alpha + \lambda\,d\beta = 0,$$

což vyžaduje rovnost

$$\frac{da}{db} = \frac{d\alpha}{d\beta}$$

čili

$$da\,d\beta - db\,d\alpha = 0; \tag{41}$$

to jest hledanou výminkou, za které přímka (38) *naplní plochu rozvinutelnou.*

Jest-li tato výminka, aneb, jinak psáno, rovnice

$$\frac{da}{dt}\frac{d\beta}{dt} - \frac{db}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = 0$$

vyplněna, jeví se plocha přímočará jakožto obálka rovin (39), kde $\lambda = -\frac{da}{db} = -\frac{d\alpha}{d\beta}$.

Přímočará plocha rozvinutelná má podél celé plošné přímky jednu tečnou rovinu, totiž rovinu obalenou (39); ale i opak platí, t. j. *přímočará plocha, která má podél každé plošné přímky jednu tečnou rovinu, jest rozvinutelná.*

Abychom to ukázali, mějme rovnice (38) plošné přímky dané plochy; jich differencováním obdržíme

$$dx = a\,dz + (a'z + \alpha')\,dt,$$
$$dy = b\,dz + (b'z + \beta')\,dt,$$

kde a', b', α', β' značí derivace dle t vzaté; eliminací dt máme

$$(b'z + \beta')\,dx - (a'z + \alpha')\,dy = [a\,(b'z + \beta') - b\,(a'z + \alpha')]\,dz,$$

z čehož soudíme, že

$$p = \frac{b'z + \beta'}{(ab' - ba')\,z + a\beta' - b\alpha'},$$
$$q = -\frac{a'z + \alpha'}{(ab' - ba')\,z + a\beta' - b\alpha'}.$$

Má-li tečná rovina podél přímky (38) býti jediná, musí hodnoty p, q býti neodvislé od z; k tomu jest ale nutné a stačí, aby koefficienty ve jmenovateli byly úměrny oněm v čítatelích:

$$\frac{ab' - ba'}{b'} = \frac{a\beta' - b\alpha'}{\beta'}, \quad \frac{ab' - ba'}{a'} = \frac{a\beta' - b\alpha'}{\alpha'},$$

t. j.

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\alpha'}{\beta'} \text{ čili } a'\beta' - b'\alpha' = 0,$$

což jest relace (41) dokazující, že plocha jest rozvinutelnou.

V čl. 160. jsme ukázali, že rozvinutelná plocha jest geometrickým místem tečen jisté čáry; ale i opak možno dokázati, že totiž *tečny libovolné čáry naplňují plochu rozvinutelnou.*

Buďte a, b, c souřadnice libovolného bodu M dané čáry, tedy určité funkce jedné proměnné t. Libovolný bod P na tečně této čáry má souřadnice

$$x = a + u\mathrm{A}, \quad y = b + u\mathrm{B}, \quad z = c + u\mathrm{C},$$

značí-li u délku $\overline{\mathrm{MP}}$ a A, B, C cosiny úhlů tečny, tedy

$$\mathrm{A} = \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \quad \mathrm{B} = \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}},$$
$$\mathrm{C} = \frac{c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Differencováním

$$dx = (a' + uA')\,dt + A\,du,$$
$$dy = (b' + uB')\,dt + B\,du,$$
$$dz = (c' + uC')\,dt + C\,du,$$

z čehož eliminací dt a du a nahrazením dx, dy, dz hodnotami $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ rovnice tečné roviny plochy v bodě P:

$$\begin{vmatrix} X - a - uA, & a' + uA', & A \\ Y - b - uB, & b' + uB', & B \\ Z - c - uC, & c' + uC', & C \end{vmatrix} = 0.$$

Přidáme-li u-násobný třetí sloupec k prvnímu a $-\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}$-násobný třetí sloupec k druhému, obdržíme, krátivše u,

$$\begin{vmatrix} X - a, & A', & A \\ Y - b, & B', & B \\ Z - c, & C', & C \end{vmatrix} = 0$$

jakožto rovnici tečné roviny v P; do rovnice té nevchází u, jest tedy tečná rovina závislá jen na t a tedy ve všech bodech přímky MP táž, t. j. plocha tečen jest rozvinutelnou.

Výminku (41) charakterisující plochu rozvinutelnou možno geometricky i jinak ještě vyložiti. Budiž (38) plošná přímka přímočaré plochy příslušná parametru t, a

$$(42) \qquad \begin{cases} x = (a + \Delta a)\,z + \alpha + \Delta\alpha, \\ y = (b + \Delta b)\,z + \beta + \Delta\beta, \end{cases}$$

plošná přímka příslušná parametru $t + \Delta t$. Nejkratší vzdálenost obou přímek D a jich sklon i jsou dány formulemi

$$D = \frac{\Delta a\,\Delta\beta - \Delta b\,\Delta\alpha}{\pm\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}},$$

$$\sin i = \frac{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\,\sqrt{1 + (a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2}},$$

tak že

$$\frac{D}{\sin i} = \pm\frac{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\,\sqrt{1 + (a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2}\,(\Delta a\,\Delta\beta - \Delta b\,\Delta\alpha)}{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2},$$

a tedy

$$\frac{D}{i} = \pm \frac{\sin i}{i}$$

$$\frac{\sqrt{1+a^2+b^2}\ \sqrt{1+(a+\Delta a)^2+(b+\Delta b)^2}\left(\frac{\Delta a}{\Delta t}\frac{\Delta \beta}{\Delta t} - \frac{\Delta b}{\Delta t}\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}\right)}{\left(\frac{\Delta a}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta b}{\Delta t}\right)^2+\left(a\frac{\Delta b}{\Delta t} - b\frac{\Delta a}{\Delta t}\right)^2}.$$

Pro $\lim \Delta t = 0$ se blíží druhá přímka první a jest tedy $\lim D = 0$, $\lim i = 0$, a vzhledem k $\lim \frac{\sin i}{i} = 1$ máme

$$\lim \frac{D}{i} = \pm (1 + a^2 + b^2) \frac{\frac{da}{dt}\frac{d\beta}{dt} - \frac{db}{dt}\frac{d\alpha}{dt}}{\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(a\frac{db}{dt} - b\frac{da}{dt}\right)^2},$$

z čehož soudíme, *že vzdálenost* D *a sklon* i *jsou nekonečně malé téhož stupně u ploch zborcených a že* D *jest nekonečně malá hodnota vyššího stupně než* i *u ploch rozvinutelných*; u těch totiž platí rovnice (42) a tedy

$$\lim \frac{D}{i} = 0.$$

Při této úvaze jsme sklon i ovšem pokládali za proměnnou hodnotu; jest tedy z této úvahy vyloučen případ ploch válcových, u nichž $i = 0$.

163. Čáry křivoznačné.

Čára na dané ploše sluje její čarou křivoznačnou (ligne de courbure), jest-li plocha normal, sestrojených k ploše podél čáry, rozvinutelnou (Monge).

Budiž M (x, y, z) bodem na ploše a tedy rovnice normály plochy

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1},$$

aneb řešením dle X a Y:

$$\begin{aligned} X &= -pZ + pz + x, \\ Y &= -qZ + qz + y, \end{aligned} \tag{43}$$

kde x, y, z, p, q jsou ovšem funkce jedné proměnné, na níž závisí bod dané čáry. Přímočará plocha naplněná touto přímkou bude rozvinutelnou, platí-li relace (41), t. j. relace

$$-dp\,d(qz + y) + dq\,d(pz + x) = 0$$

čili, po krátké redukci,

$$\frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz}; \tag{44}$$

relace ta musí býti vyplněna pro všecky body čáry, aby byla tato křivoznačnou.

Nahradíme-li dz, dp, dq jich hodnotami, přejde poslední rovnice do

$$\frac{r\,dx + s\,dy}{(1+p^2)\,dx + pq\,dy} = \frac{s\,dx + t\,dy}{pq\,dx + (1+q^2)\,dy} \tag{45}$$

čili do

$$[(1+q^2)\,s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+q^2)\,r - (1+p^2)\,t]\,\frac{dy}{dx} + [pqr - (1+p^2)\,s] = 0; \tag{46}$$

v ní jsou derivace p, q, r, s, t známé funkce proměnných x, y, a jest tedy (46) differenciálnou rovnicí průmětu křivoznačných čar na rovině x, y. Pro každý bod x, y podává (46) dvě hodnoty $\frac{dy}{dx}$, t. j. každým bodem plochy procházejí dvě křivoznačné čáry, vyjmeme-li body kruhové; pro ty jest poslední rovnice totožností, a stanovení příslušné derivace $\frac{dy}{dx}$ by vymáhalo zvláštní úvahy.

Vzhledem k $dx : dy : dz = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$, kde α, β, γ značí úhly tečny čáry v bodě M, možno v (45) dx, dy nahraditi $\cos\alpha$, $\cos\beta$ a pak přechází tato rovnice do rovnice

$$\frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta} = \frac{s\cos\alpha + t\cos\beta}{pq\cos\alpha + (1+q^2)\cos\beta},$$

jež charakterisovala tečny hlavních řezů (čl. 158.); z toho soudíme:

Každým bodem plochy procházejí dvě křivoznačné čáry, dotýkající se tečen hlavních řezů, a tedy k sobě kolmé; jinak řečeno, hlavní osy indikatrix jsou tečnami křivoznačných čar.

Normály plochy podél křivoznačné čáry sestrojené dotýkají se čáry úvratu plochy rozvinutelné. Jsou tedy (43) rovnice charakteristiky této plochy, a bod dotyčný C její s čárou úvratu hoví také rovnicím, které plynou jich differencováním dle parametru *):

$$-Z\,dp + p\,dz + z\,dp + dx = 0,$$
$$-Z\,dq + q\,dz + z\,dq + dy = 0.$$

Těmto i rovnicím (43) hoví souřadnice X, Y, Z bodu C; že se tyto čtyři rovnice pro tři neznámé srovnávají, ukazuje také rovnice (44). Řešením totiž máme

$$Z - z = \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq},$$

*) V čl. 159. byly rovnice charakteristicky $f = 0$, $f = 0$, z nichž derivováním dle parametru plynou $f' = 0, f'' = 0$, a všem těm rovnicím hověl bod čáry úvratu.

načež (43) podávají $X - x$ a $Y - y$. Polohu bodu C ostatně vystihneme snadněji takto; nahradíme-li dx, dy hodnotami $\cos \alpha$, $\cos \beta$ příslušnými tečně hlavního řezu, máme

$$Z - z = \frac{(1 + p^2) \cos \alpha + pq \cos \beta}{r \cos \alpha + s \cos \beta} = \frac{pq \cos \alpha + (1 + q^2) \cos \beta}{s \cos \alpha + t \cos \beta}.$$

aneb násobením čítatele i jmenovatele prvního zlomku hodnotou $\cos \alpha$, druhého $\cos \beta$ a sečtením čítatelů a jmenovatelů,

$$Z - z = \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + (p \cos \alpha + q \cos \beta)^2}{r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta}$$

čili, vzhledem ku $\cos \gamma = p \cos \alpha + q \cos \beta$,

$$Z - z = \frac{1}{r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta},$$

t. j. (čl. 155.)

$$Z = z + \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

kde R značí poloměr zakřivení hlavního řezu. Tím nalézáme: *Normály plochy sestrojené podél křivoznačné čáry se dotýkají čáry úvratu rozvinutelné plochy jimi vytvořené ve středech zakřivení hlavních řezů*; jest tedy čára úvratu geometrické místo středů zakřivení hlavních řezů, vedených tečnami čáry křivoznačné.

Není zbytečno podotknouti, že R není obecně poloměrem zakřivení R' čáry křivoznačné, neboť značí-li ϑ sklon hlavní normály této čáry s normálou plochy, máme dle věty Meusnierovy $R' = R \cos \vartheta$; jen v případě, kdy oskulační rovina křivoznačné čáry jest normálná, tedy $\vartheta = 0$, máme $R' = R$.

164. **Příklady k čarám křivoznačným.**

Stanovení křivoznačných čar dané plochy vymáhá stanovení obecné funkce y proměnné x hovící rovnici (46), t. j. integrování této differenciálné rovnice. V některých případech vede již definice těchto čar k jich stanovení, jakož ukazují následující příklady.

Na *ploše kulové* jest každá čára křivoznačnou, a rovnice (46) totožností; normály plochy jsou poloměry a naplňují, podél každé čáry, plochu kuželovou, tedy rozvinutelnou. Totéž platí o rovině.

Na *libovolné ploše kuželové* tvoří plošné přímky a průsečnice kužele s kulemi, opsanými kolem vrcholu, čáry křivoznačné;

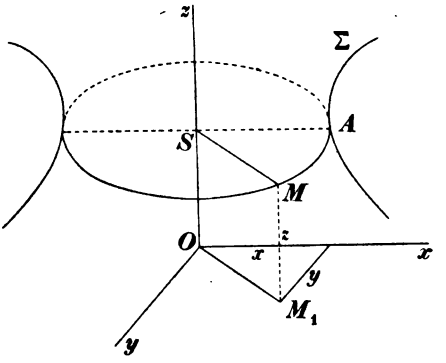
normály podél plošné přímky sestrojené naplňují totiž rovinu, a ony průsečnice jsou k plošným přímkám všude kolmy.

Obdobně vychází, že na *libovolné ploše válcové* tvoří plošné přímky s normálnými řezy čáry křivoznačné.

Na *obecné ploše rozvinutelné*, naplněné tečnami prostorové čáry, jsou tyto plošné přímky jednou soustavou křivoznačných čar, druhá soustava se skládá z čar je kolmo protínajících; tvoří totiž normály plochy podél plošné přímky patrně rovinu.

U *ploch rotačních* jsou rovnoběžníky a poledníky (meridiany) čarami křivoznačnými; normály podél prvnějších čar naplňují totiž kužele, podél druhých roviny. Pro cvičení stvrdíme to i počtem. Budiž dána plocha vznikající otáčením čáry Σ (obr. 50.), dané v rovině xz, kolem osy z. Souřadnice $\overline{OS}$, $\overline{SA}$ bodu A hoví dané rovnici čáry Σ

$$\overline{OS} = \varphi(\overline{SA}).$$



Obr. 50

Budiž $M(x, y, z)$ libovolný bod kružnice opsané bodem A; pak patrně

$$z = \overline{OS},$$

$$x^2 + y^2 = \overline{SM}^2 = \overline{SA}^2.$$

Eliminací hodnot $\overline{OS}$ a $\overline{SA}$ z těchto tří rovnic plyne rovnice rotační plochy

$$z = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \text{ čili } z = f(x^2 + y^2).$$

Za příčinou stručnosti položme

$$x^2 + y^2 = u, \quad z = f(u),$$

a ustanovme derivováním

$$p = 2xf'(u), \quad q = 2yf'(u),$$
$$r = 2f'(u) + 4x^2f''(u), \quad s = 4xyf''(u), \quad t = 2f'(u) + 4y^2f''(u).$$

Rovnice průmětu křivoznačných čar (46) tím nabývá tvaru

$$(47) \quad \left[f''(u) - 2f'(u)^3\right]\left[4xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} - 4xy\right] = 0.$$

Předpokládejme nejprve, že $f''(u) - 2f'(u)^3$ není nullou; pak musí druhý faktor vymizeti, t. j. krátíce $4xy$,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{x^2 - y^2}{xy}\frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

z čehož pro $\frac{dy}{dx}$ nalézáme dvě hodnoty $\frac{y}{x}$ aneb $-\frac{x}{y}$. První podává

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0 \text{ čili } d \log \frac{y}{x} = 0,$$

z čehož soudíme, že $\frac{y}{x}$ jest stálý podíl, tedy $y = Cx$; rovnice ta náleží přímkám v rovině xy vedeným počátkem, a přímky ty jsou průměty meridianů, tyto tedy křivoznačné čáry.

Druhé řešení podává

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad x\,dx + y\,dy = 0 \text{ čili } d(x^2 + y^2) = 0,$$

a jest tedy $x^2 + y^2 = C_1$; ale toť rovnice průmětu rovnoběžníků plochy.

Zbývá přihlédnouti k případu, kdy vyhověno rovnici (47) křivoznačných čar tím, že položeno.

$$f''(u) - 2f'(u)^3 = 0;$$

v případě tom jest (47) vyplněna libovolnou hodnotou $\frac{dy}{dx}$, t. j. každá čára na ploše jest křivoznačnou. Píšeme-li v místo $f'(u)$, máme

$$\frac{dv}{du} - 2v^3 = 0 \quad \text{čili} \quad d\left(-\frac{1}{2v^2} - 2u\right) = 0,$$

pročež

$$\frac{1}{2v^2} + 2u = 2c^2,$$

kde c^2 značí kladnou stálou, poněvadž $u = x^2 + y^2$ jest také kladné.

Řešením

$$v = \frac{1}{2\sqrt{c^2 - u}}, \text{ t. j. } \frac{df(u)}{du} = \frac{1}{2\sqrt{c^2 - u}}$$

aneb píšíce opět z místo $f(u)$,

$$d\left(z + \sqrt{c^2 - u}\right) = 0, \quad z + \sqrt{c^2 - u} = c_1,$$

kde c_1 jest také stálá. Tím konečně

$$(z - c_1)^2 = c^2 - u,$$

t. j.

$$x^2 + y^2 + (z - c_1)^2 = c^2;$$

plocha jest tedy koule, jejíž střed se nalézá na ose z, a na ní ovšem každá čára křivoznačnou.

První zajímavější příklad stanovení křivoznačných čar podal *Monge* sám, stanoviv tyto čáry na trojosém ellipsoidu*) integrací příslušné rovnice (46), k čemuž se v počtu integrálném vrátíme.

165. Čáry asymptotické na ploše.

Asymptotickou čarou (Haupttangentencurve) *na dané ploše nazýváme čáru, jejíž oskulační rovina v libovolném bodě splývá s tečnou rovinou plochy.*

Jsou-li x, y, z souřadnice libovolného bodu na ploše, jímž prochází asymptotická čára, jsou koefficienty její oskulační roviny

$$a\,(X - x) + b\,(Y - y) + c\,(Z - z) = 0$$

stanoveny co do poměrů rovnicemi

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$
$$a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0,$$

při čemž x, y, z pokládáme za funkce jedné proměnné.

Aby se tato rovina stotožnila s tečnou rovinou

$$Z - z = p\,(X - x) + q\,(Y - y),$$

musí p, q, -1 vloženy za a, b, c hověti oběma oněm rovnicím, t. j. musí

$$p\,dx + q\,dy - dz = 0, \quad p\,d^2x + q\,d^2y - d^2z = 0.$$

První z těchto rovnic jest vyplněna na každé čáře plochy; vzhledem k jejímu differenciálu

$$p\,d^2x + q\,d^2y - d^2z + dx\,dp + dy\,dz = 0$$

možno druhou přepsati na

$$dx\,dp + dy\,dq = 0,$$

čili nahradíce dp, dq jich hodnotami, na

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0; \tag{48}$$

toť differenciálná rovnice průmětu asymptotických čar na rovině x, y, vyjádříme-li z rovnice plochy r, s, t jakožto funkce x, y.

Má-li bodem plochy procházeti asymptotická čára, musí z ní plynoucí derivace

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}$$

*) *Monge*, Application de l'Analyse à la Géométrie

býti reálné, t. j. buď $rt - s^2 < 0$, a pak jest plocha v bodě (x, y, z) vypoukle vydutá a procházejí jím dvě asymptotické čáry, aneb $rt - s^2 = 0$, a pak jest plocha po jedné straně tečné roviny, mající jedinou bodem tím procházející asymptotickou čáru.

Vzhledem k (48) jest patrné, že tečny asymptotických čar, bodem (x, y, z) procházejících, mají směry (α, β, γ) činící

$$r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta = 0,$$

že tedy normálný řez takovou tečnou vedený má poloměr zakřivení $R = \pm \infty$; *jsou tudíž tečny asymptotických čar asymptotami indikatrix či tečnami hlavními* *).

Tečny ty možno i jinak charakterisovati. *Průsečná čára plochy s tečnou rovinou bodu (x, y, z) má v tomto bodě bod dvojný, a jeho tečny jsou tečnami asymptotických čar.*

Ona průsečná čára jest stanovena rovnicí plochy a rovnicí tečné roviny

$$\left\{ \begin{array}{c} Z = f(X, Y), \\ Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \end{array} \right.$$

Pro libovolný bod (X, Y, Z) této průsečné čáry položme

$$X = x + \Delta x, \quad Y = y + \Delta y, \quad Z = z + \Delta z,$$

a máme rovnice

$$\left\{ \begin{array}{l} z + \Delta z = f(x + \Delta x, \quad y + \Delta y) = f(x, y) + p\,\Delta x + q\,\Delta y \\ \qquad + \frac{1}{2}(r\,\Delta x^2 + 2s\,\Delta x\,\Delta y + t\,\Delta y^2) + \ldots, \\ \qquad \Delta z = p\,\Delta x + q\,\Delta y, \end{array} \right.$$

z nichž první vzhledem k druhé přechází do

$$0 = \tfrac{1}{2}(r\,\Delta y^2 + 2s\,\Delta x\,\Delta y + t\,\Delta y^2) + \ldots,$$

aneb

$$0 = \frac{1}{2}\left(r + 2s\,\frac{\Delta y}{\Delta x} + t\,\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right) + \ldots,$$

z čehož pro $\lim \Delta x = 0$,

$$0 = r + 2s\,\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

což jest rovnice (48), charakterisující tečny asymptotických čar.

Toto jich charakterisování ukazuje, že *differenciálnou rovnicí* (48) *jsou vytčeny asymptotické čáry i tehdy, kdy x, y, z jsou souřadnice rovnoběžné kosoúhlé.*

Případ, kdy bodem plochy prochází vždy jen jedna asympto-

---

*) *Ch. Dupin* (Développements de Géometrie, 1813) definoval asymptotické čáry přímo jako čáry dotýkající se hlavních tečen, jež nutno různiti od tečen hlavních řezů, os to indikatrix.

tická čára, nastává u ploch rozvinutelných; *charakterisuje totiž parciálná differenciálná rovnice druhého řádu*

$$rt - s^2 = 0 \tag{49}$$

plochy rozvinutelné.

Ukažme nejdříve, že každá rozvinutelná plocha hoví této rovnici. — Dle definice závisí tečná rovina takové plochy

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

čili

$$Z = pX + qY + z - px - qy$$

na jednom parametru; volíce za něj třeba p, soudíme, že q a $z - px - qy$ jsou funkcemi jeho:

$$q = \varphi(p), \quad z - px - qy = F(p).$$

Derivujeme-li první rovnici parciálně dle x a y, máme

$$s = \varphi'(p)\, r, \quad t = \varphi'(p)\, s,$$

tedy

$$\varphi'(p) = \frac{s}{r} = \frac{t}{s} \text{ a } rt - s^2 = 0.$$

Dokažme nyní na druhém místě, že naopak každé $z = f(x, y)$ hovící rovnici (49) jest pořadnicí rozvinutelné plochy.

Pišme

$$rt - s^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x}, & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{D(p, q)}{D(x, y)} = 0;$$

dle čl. 111. soudíme, že q jest funkcí p:

$$q = \varphi(p). \tag{50}$$

Obdobně dokážeme, že $z - px - qy$ jest funkcí p; jest totiž funkcionálný determinant

$$\frac{D(z - px \quad qy, \quad p)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} -xr - ys, & -xs - yt \\ r, & s \end{vmatrix}$$

$$= y(rt - s^2) = 0,$$

a tedy

$$z - px - qy = F(p). \tag{51}$$

Rovnicím (50) a (51) hoví arci každý bod plochy. Differencujme tedy rovnici (51) a máme

$$-x\, dp - y\, dq = F'(p)\, dp.$$

čili dělíce dp a vzhledem k (50)

$$-x - y\varphi'(p) = F'(p), \tag{52}$$

rovnice taktéž platná pro každý bod plochy.

Všecky body plochy, pro něž p má stálou hodnotu, naplňují přímku danou rovnicemi (51) a (52):

$$z - px - \varphi(p)\, y = \mathrm{F}(p)$$
$$-x - \varphi'(p)\, y = \mathrm{F}'(p);$$

přímka ta jest patrně charakteristika roviny (51) závislé na parametru p, a jest tedy plocha rozvinutelnou, jak bylo dokázati.

Každým bodem plochy rozvinutelné prochází jen jedna asymptotická čára, dotýkajíc se hlavní tečny, t. j. plošné přímky; jsou tedy plošné přímky asymptotickými čarami ploch rozvinutelných. Právě tak vychází, že i u ploch zborcených jsou plošné přímky čarami asymptotickými; vzhledem k $rt - s^2 < 0$ existuje ale na plochách těch ještě druhý systém asymptotických čar.

166. **Příklady k čarám asymptotickým.**

Stanovení asymptotických čar, vymáhající integraci diferenciálné rovnice (48), náleží do počtu integrálného; zde se omezíme na dva jednoduché příklady, z nichž první se týká přímé plochy šroubové dané rovnicí

$$y - x \operatorname{tg} \frac{z}{am} = 0,$$

z níž jsme (čl. 140.) již odvodili první derivace funkce z:

$$p = -\frac{amy}{x^2 + y^2}, \quad q = \frac{amx}{x^2 + y^2};$$

dalším derivováním obdržíme

$$r = \frac{2am\,xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad s = am\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad t = -\frac{2am\,xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

a tedy

$$rt - s^2 = -\frac{a^2m^2}{(x^2 + y^2)^2} < 0,$$

což ukazuje, že plocha jest ve všech bodech svých vypoukle vydutá.

Rovnice (48) asymptotických čar jest nyní

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y^2 - x^2}{xy}\frac{dy}{dx} - 1 = 0,$$

z níž pro $\frac{dy}{dx}$ vypočteme dvě hodnoty $\frac{y}{x}$ a $-\frac{x}{y}$; z nich soudíme jako v čl. 164., že průměty asymptotických čar na rovinu xy jsou dány rovnicemi

$$y = Cx, \text{ resp. } x^2 + y^2 = C_1{}^2,$$

a jsou tedy asymptotické čáry jednoho systému přímky plošné, a druhého systému šroubovice, v nichž plochu protínají rotační válce kolem osy Oz opsané.

Jakožto druhý příklad uvažujme obecný konoid, t. j. plochu vytvořenou přímkou, která protíná pevnou (řídící) přímku jsouc stále rovnoběžna s pevnou (řídící) rovinou. Volíme-li řídící přímku za osu Oz a řídící rovinu za rovinu Oxy soustavy rovnoběžných souřadnic, jest rovnice konoidu

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Učiníme-li za příčinou stručnosti

$$\frac{y}{x} = u, \quad z = \varphi(u),$$

máme

$$r = \frac{u}{x^2}(2\varphi' + u\varphi''), \quad s = -\frac{1}{x^2}(\varphi' + u\varphi''), \quad t = \frac{1}{x^2}\varphi'',$$

$$rt - s^2 = -\frac{\varphi'^2}{x^4} < 0,$$

a rovnice (48) tedy podává

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi' + u\varphi'' \pm \varphi'}{\varphi''},$$

tak že $\frac{dy}{dx}$ má dvě hodnoty $\frac{y}{x}$ a $u + \frac{2\varphi'(u)}{\varphi''(u)}$. První vede ku $y = Cx$, a tedy k plošným přímkám daným rovnicemi

$$y = Cx, \quad z = \varphi(C);$$

druhá vzhledem k $y = ux$, $dy = u\,dx + x\,du$ k rovnici

$$x\frac{du}{dx} = 2\frac{\varphi'(u)}{\varphi''(u)}$$

čili

$$d[\log \varphi'(u) - 2\log x] = 0,$$

z níž soudíme, že podíl $\frac{\varphi'(u)}{x^2}$ jest stálý, že tedy

$$\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = Cx^2$$

jest rovnicí průmětu druhého systému asymptotických čar, vzatého ve směru osy z na rovinu xy. Výsledek ten zahrnuje patrně výsledek předchozí.

167. Gaussova míra křivosti.

Totálná křivost oblouku rovinné čáry byla odchylka tečen, aneb, což jest totéž, odchylka normál v jejích koncových bodech; vedeme-li k těmto normálám v kružnici o poloměru 1 rovnoběžné poloměry, omezí jich koncové body oblouk, jehož délka jest onou totálnou křivostí.

Obdobně možno definovati *totálnou křivost Σ určité části σ dané plochy* jakožto plochu vytčenou na kouli o poloměru 1 koncovými body všech poloměrů vedených rovnoběžně s normálami oné části plochy. Zobrazíme-li libovolný bod M dané plochy na oné kouli bodem koncovým M_0 poloměru rovnoběžného s normálou v M, *jest totálná křivost určité části σ dané plochy prostě plocha Σ sférického obrazu jejího. Limita podílu z totálné křivosti a z dané plochy, pro případ, že tato se stává nekonečně malou, redukujíc se na bod* M, *sluje dle Gausse mírou křivosti plochy v bodě* M*).

Za směr vnější normály plochy $z = f(x, y)$ v bodě $M(x, y, z)$ volme n. p. onen, jenž uzavírá s kladnou osou z úhel ostrý, jenž tedy tedy tvoří s osami úhly o cos.

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

kde odmocnina jest vzata kladně.

Vytkněme na dané ploše element plošný $d\sigma$, obsahující bod M, a sestrojme vnější normály plochy podél okraje elementu; pohyblivý bod nechť probíhá okraj tento určitým směrem, třeba od levé k pravé straně pro pozorovatele stojícího ve vnější normále tak, že směr od nohou k hlavě se shoduje s vytknutým směrem normály.

Sférický obraz elementu $d\sigma$ buď kulový element $d\Sigma$; obraz pohyblivého bodu proběhne okraj elementu $d\Sigma$ vzhledem k vnější normále koule buď týmž směrem neb opáčným; v případě prvním béřeme plochu $d\Sigma$ kladně, v druhém záporně, tedy i míru křivosti kladně, resp. záporně. Již názor ukazuje, že první případ má místa, je-li daná plocha v bodě M vypoukle vypouklá, a druhý, je-li vypoukle vydutá; nadto to počtem dokážeme.

Za element plošný $d\sigma$ zvolme infinitesimálný trojúhelník na dané ploše, jehož vrcholy nechť jsou $M(x, y, z)$, $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$, $M''(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$; průměty tohoto

*) *Gauss*, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comment. Soc. r. scient. Gottingensis recent., 1828; Werke, t. IV.

elementu, jejž možno pokládati za trojúhelník obsažený v tečné rovině bodu M, na rovině xy jest trojúhelník o vrcholech $P(x, y)$, $P'(x + dx, y + dy)$, $P''(x + \delta x, y + \delta y)$. Následují-li body M, M', M'' za sebou pro případ, že pohyblivý bod probíhá obvod trojúhelníku $d\sigma$ od levé strany k pravé, jest směr oběhu, daného sledem P, P', P'', vzhledem ku kladné ose z též od levé k pravé, a tedy rotace převádějící stranu $\overline{PP'}$ do $\overline{PP''}$ téhož směru, t. j. $dx\,\delta y - dy\,\delta x$ hodnota kladná; hodnota ta se rovná dvojnásobné ploše trojúhelníku PP'P''.

Sférické obrazy bodů M, M', M'' buďte M_0, M'_0, M''_0, a průměty těchto na rovině xy buďte P_0, P'_0, P''_0. Značíme-li X, Y, Z souřadnice bodu M_0, $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ bodu M'_0 a $X + \delta X$, $Y + \delta Y$, $Z + \delta Z$ bodu M''_0, podává výraz $dX\,\delta Y - dY\,\delta X$ obdobně dvojnásobnou plochu trojúhelníku $P_0P'_0P''$ a s. kladně, je-li sledem P_0, P'_0, P''_0 vytčen oběh od levé k pravé, a záporně v případě opáčném.

Poněvadž tečné roviny plochy v bodě M a koule v bodě M_0 jsou rovnoběžny, tedy trojúhelníky MM'M'' a $M_0M'_0M''_0$ v rovnoběžných rovinách, jest podíl jich ploch $d\Sigma : d\sigma$ týž, jako podíl ploch jich průmětů, t. j.

$$\frac{d\Sigma}{d\sigma} = \frac{dX\,\delta X - dY\,\delta X}{dx\,dy - dy\,\delta x},$$

a podíl ten vychází kladně, jsou-li směry oběhů MM'M'' a $M_0M'_0M''_0$ souhlasné, záporně v opáčném případě; *podíl ten podává tedy míru křivosti k plochy v bodě* M. Volíme-li za element plošný $d\sigma$ libovolnou infinitesimálnou část dané plochy, obsahující bod M, stačí ji rozděliti na trojúhelníky, aby bylo zjevno, že i pak $d\Sigma : d\sigma$ jest právě napsaný podíl.

Značíme-li α, β, γ úhly normály plochy v bodě M, máme, kladouce střed pomocné kulové plochy do počátku souřadnic,

$$X = \cos\alpha, \quad Y = \cos\beta, \quad Z = \cos\gamma,$$

t. j.

$$X = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

hodnoty p, q jsou ovšem funkce neodvisle proměnných x, y.

Vzhledem k tomu jest

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x}\,dx + \frac{\partial X}{\partial y}\,dy, \quad \delta X = \frac{\partial X}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\,\delta y,$$

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Y}{\partial y}\,dy, \quad \delta Y = \frac{\partial Y}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial Y}{\partial y}\,\delta y,$$

a tedy dle věty o násobení determinantů

$$\begin{vmatrix} dX, \delta X \\ dY, \delta Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}, & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx, & dy \\ \delta x, & \delta y \end{vmatrix},$$

z čehož míra křivosti

$$k = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}, & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$$

vyjádřena jakožto funkcionálný determinant. Dle čl. 111. však máme

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \frac{D(X, Y)}{D(p, q)} \cdot \frac{D(p, q)}{D(x, y)};$$

nyní ale nalézáme

$$\frac{\partial X}{\partial p} = \frac{-1 - q^2}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial X}{\partial q} = \frac{pq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial p} = \frac{pq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial Y}{\partial q} = \frac{-1 - p^2}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

čímž

$$\frac{D(X, Y)}{D(p, q)} = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

a dále

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} r, & s \\ s, & t \end{vmatrix} = rt - s^2,$$

tak že konečně

$$k = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

podává Gaussovu míru křivosti plochy v bodě M. Označíme-li R_1, R_2 hlavní poloměry zakřivení plochy v tomto bodě, máme dle čl. 158. týž výraz pro $1 : R_1 R_2$, čímž nalézáme

$$k = \frac{1}{R_1 R_2},$$

t. j. *míra křivosti jest reciproká hodnota součinu obou hlavních poloměrů zakřivení**).

Při $rt - s^2 > 0$, t. j. při ploše vypoukle vypouklé vychází k kladně, při ploše vypoukle vyduté záporně; při $rt - s^2 = 0$, t. j. při ploše rozvinutelné jest míra křivosti rovna nulle.

Rozsah tohoto díla nedovoluje, abychom vyložili význam pojmu míry křivosti pro theorii applikace ploch, a poukazujeme v té příčině pouze na fundamentální práci Gaussovu, již citovanou; nynější stav infinitesimálné theorie ploch a čar pozná čtenář nejlépe z krásného díla: *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Paris, 1887—96, 4 vol.**).

---

*) Francouzští spisovatelé označují míru křivosti k názvem *courbure totale*, jímž Gauss značil konečnou sférickou plochu Σ čili $\int k\, d\sigma$.

**) Sr. můj referát „Úvahy o pohybu v theorii ploch a čar" ve Věstníku české Akademie, roč. III., str. 81.

Kapitola XII.

Elementárné funkce komplexní proměnné.

168. **Funkce racionálné.**

Budiž $z = x + iy$ komplexní proměnná, t. j. hodnota, v níž alespoň jedno z reálných čísel x, y jest proměnné. V této krátké kapitole uvažujeme některé elementárné funkce komplexní proměnné, výrazy to utvořené jistými početními úkony z hodnoty z.

Značí-li A_0, A_1, .. A_m daná, obecně komplexní čísla, nazýváme výraz

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + .. + A_m z^m$$

racionálnou celistvou funkcí proměnné z. Dle dřívějších úvah dovedeme $f(z)$ převésti na komplexní tvar $u + iv$; položíme-li koefficienty do normálného tvaru

$$A_\nu = a_\nu (\cos \alpha_\nu + i \sin \alpha_\nu), \quad \nu = 0, 1, 2 .. m,$$

a taktéž proměnnou z

$$z = \varrho (\cos \omega + i \sin \omega),$$

jest (čl. 17.)

$$z^\nu = \varrho^\nu (\cos \nu\omega + i \sin \nu\omega),$$

$$A_\nu z^\nu = a_\nu \varrho^\nu [\cos (\alpha_\nu + \nu\omega) + i \sin (\alpha_\nu + \nu\omega)],$$

a tudíž

$$f(z) = \sum_{(\nu)} a_\nu \varrho^\nu \cos (\alpha_\nu + \nu\omega) + i \sum_{(\nu)} a_\nu \varrho^\nu \sin (\alpha_\nu + \nu\omega).$$

Podíl dvou racionálných celistvých funkcí $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ sluje racionálnou lomenou funkcí proměnné z, a také tu dovedeme uvésti na tvar komplexní jakožto podíl dvou komplexních čísel.

Jest-li výraz $f(z)$ utvořen z proměnné z a ze stálých hodnot základními úkony početními a odmocňováním, sluje $f(z)$ irracionálnou funkcí; poněvadž dovedeme odmocninu z komplexního čísla uvésti na komplexní tvar (čl. 17.), možno i irracionálnou funkci na takový tvar převésti.

Komplexní hodnota Z, jejíž existenci *Gauss* dokázal, hovící rovnici

$$A_0 Z^m + A_1 Z^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

kde $A_0, A_1, \ldots A_m$ jsou racionálné funkce proměnné z, sluje algebraickou funkcí této proměnné; patrně jsou racionálné i irracionálné funkce algebraickými.

169. **Funkce exponenciálná komplexní proměnné.**

Nekonečná řada

$$(1) \qquad 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

konverguje absolutně pro každé komplexní z; je-li $|z| = \varrho$, jest řada absolutních hodnot členů:

$$1 + \frac{\varrho}{1} + \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \ldots,$$

a ta konverguje pro každé ϱ.

Součet řady (1), závislý na komplexním číslu z, se zove exponenciálnou funkcí této proměnné a označuje symbolem e^z, tedy definujeme

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots;$$

při reálném z má e^z svůj dřívější význam.

Pro každé dvě komplexní hodnoty z, z_1 platí rovnice

$$e^z e^{z_1} = e^{z+z_1},$$

právě tak jako pro reálné platila. Máme totiž

$$e^z e^{z_1} = \left(1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{z_1}{1} + \frac{z_1^2}{1.2} + \ldots\right)$$

a vzhledem k absolutní konvergenci obou řad (čl. 30.) vynásobením

$$e^z e^{z_1} = 1 + \frac{z + z_1}{1} + \left(\frac{z^2}{1.2} + zz_1 + \frac{z_1^2}{1.2}\right) + \ldots,$$

kde na pravo obecný člen patrně jest

$$\frac{z^n}{\lfloor n} + \frac{z^{n-1}}{\lfloor n-1}\frac{z_1}{1} + \ldots + \frac{z^{n-r}}{\lfloor n-r}\frac{z_1^r}{\lfloor r} + \ldots + \frac{z_1^n}{\lfloor n}$$
$$= \frac{1}{\lfloor n}\left[z^n + nz^{n-1}z_1 + \ldots + \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r} z^{n-r}z_1^r + \ldots + z_1^n\right]$$
$$= \frac{(z+z_1)^n}{\lfloor n}.$$

Máme tedy

$$e^z e^{z_1} = 1 + \frac{z+z_1}{1} + \frac{(z+z_1)^2}{1.2} + \ldots + \frac{(z+z_1)^n}{\lfloor n} + \ldots,$$

t. j.

$$e^z e^{z_1} = e^{z+z_1}.$$

170. **Funkce goniometrické komplexní proměnné.**

Funkce $\cos z$ a $\sin z$ definujeme pro komplexní z rovnicemi

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{\lfloor 2} + \frac{z^4}{\lfloor 4} - \ldots, \tag{2}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{\lfloor 3} + \frac{z^5}{\lfloor 5} - \ldots; \tag{3}$$

řady ty konvergují absolutně pro každé z, a podávají při reálném z funkce $\cos z$ a $\sin z$ již dříve geometricky definované. Patrně platí i pro komplexní z

$$\cos -z = \cos z, \quad \sin -z = -\sin z.$$

Obě tyto funkce možno vyjádřiti předchozí funkcí exponenciálnou a naopak; klademe-li do funkce exponenciálné (1) iz na místo z, máme dle definice

$$e^{iz} = 1 + i\frac{z}{1} - \frac{z^2}{\lfloor 2} - i\frac{z^3}{\lfloor 3} + \frac{z^4}{\lfloor 4} + i\frac{z^5}{\lfloor 5} - \ldots,$$

t. j. vzhledem k (2) a (3)

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{4}$$

Píšeme-li $-z$ místo z, podává tato formule

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{5}$$

Z formul (4) a (5) nyní plynou funkce cos. a sin., vyjádřeny funkcí exponenciálnou

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{6}$$

Pro libovolné hodnoty z, z_1 máme

$$e^{z+iz_1} = e^z e^{iz_1} = e^z(\cos z_1 + i \sin z_1);$$

formule ta podává při reálných z a z_1 funkci exponenciálno u v komplexním tvaru, a s.

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Speciálně máme pro $x = 0$,

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega,$$

čímž máme normálný komplexní výraz v novém tvaru, často užívaném

$$\varrho(\cos \omega + i \sin \omega) = \varrho\, e^{i\omega}.$$

Poznamenejme, že speciálně $e^{2\pi i} = 1$.

Snadno nyní ukážeme, že veškeré formule goniometrické zůstávají v platnosti i při komplexních hodnotách argumentův.

Násobením rovnic (4) a (5) máme především

$$1 = \cos^2 z + \sin^2 z.$$

Relaci

$$e^{iz} e^{iz_1} = e^{i(z+z_1)},$$

čili

$$(\cos z + i \sin z)(\cos z_1 + i \sin z_1) = \cos(z + z_1) + i \sin(z + z_1),$$

možno psáti

$$\begin{aligned}\cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1 + i(\cos z \sin z_1 + \sin z \cos z_1)\\ = \cos(z + z_1) + i \sin(z + z_1),\end{aligned}$$

z čehož, nahradíme-li z, z_1 hodnotami $-z \; -z_1$,

$$\begin{aligned}\cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1 - i(\cos z \sin z_1 + \sin z \cos z_1)\\ = \cos(z + z_1) - i \sin(z + z_1);\end{aligned}$$

sečtením a odečtením těchto dvou rovnic máme další dvě formule goniometrické

$$\begin{aligned}\cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1 &= \cos(z + z_1),\\ \sin z \cos z_1 + \cos z \sin z_1 &= \sin(z + z_1).\end{aligned}$$

Mají tedy pro komplexní argumenty též platnost všecky ostatní z těchto základních vztahů odvozené formule; při tom se ostatní funkce goniometrické ovšem definují funkcemi cos. a sin. právě tak, jako při reálných argumentech, tedy

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

a t. d.

Vzhledem k tomu, že jsme funkci exponenciálnou komplexní proměnné uvedli do tvaru komplexního, není obtížné totéž učiniti při funkcích goniometrických. Máme n. p.

$$(7)\quad \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$
$$= \cos x \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} - \sin x \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}$$
$$= \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x - i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\sin x,$$

a obdobně

$$(8)\quad \sin(x+iy) = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x,$$

171. **Hyperbolické funkce.**

Učiníme-li v (7) a (8) $x = 0$, máme

$$\cos iy = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2},\quad \sin iy = i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}.$$

Funkce $\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$, $\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$ ukazují mnohé analogie s funkcemi cos. a sin., a ačkoli se vyjadřují tak jednoduchým způsobem pomocí funkce exponenciálné, označují se přece často zvláštními názvy, t. jakožto hyperbolický cos. a sin., tak že klademe

$$\cos\text{hyp}\, y = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2},\quad \sin\text{hyp}\, y = \frac{e^{y}-e^{-y}}{2},$$

neb jinak psáno

$$\cos\text{hyp}\, y = \cos iy,\quad \sin\text{hyp}\, y = \frac{\sin iy}{i}.$$

Nechtíce se pouštěti do podrobností o těchto funkcích*), připomeňme jen následující formule, plynoucí přímo z jich definice:

$$\cos\text{hyp}\, y = 1 + \frac{y^2}{\lfloor 2} + \frac{y^4}{\lfloor 4} + \frac{y^6}{\lfloor 6} + \cdot\cdot,$$
$$\sin\text{hyp}\, y = y + \frac{y^3}{\lfloor 3} + \frac{y^5}{\lfloor 5} + \frac{y^7}{\lfloor 7} \cdot\cdot,$$
$$\cos\text{hyp} - y = \cos\text{hyp}\, y,\quad \sin\text{hyp} - y = -\sin\text{hyp}\, y,$$
$$e^{y} = \cos\text{hyp}\, y + \sin\text{hyp}\, y,$$
$$e^{-y} = \cos\text{hyp}\, y - \sin\text{hyp}\, x,$$
$$1 = \cos\text{hyp}^2 y - \sin\text{hyp}^2 x,$$

*) Sr. *Laisant*, Essai sur les fonctions hyperboliques, Paris, 1874; *Studnička*, O hyperbolické obdobě Ludolfiny, Časopis pro pěst. math. a fysiky, roč. XVI.

$$\cos \operatorname{hyp}(\alpha + \beta) = \cos \operatorname{hyp} \alpha \cos \operatorname{hyp} \beta + \sin \operatorname{hyp} \alpha \sin \operatorname{hyp} \beta,$$
$$\sin \operatorname{hyp}(\alpha + \beta) = \sin \operatorname{hyp} \alpha \cos \operatorname{hyp} \beta + \cos \operatorname{hyp} \alpha \sin \operatorname{hyp} \beta.$$

Z funkcí právě definovaných se skládají ostatní hyperbolické funkce, n. p.

$$\operatorname{tg} \operatorname{hyp} y = \frac{\sin \operatorname{hyp} y}{\cos \operatorname{hyp} y} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{\sin iy}{i \cos iy},$$

čili

$$\operatorname{tg} \operatorname{hyp} y = -i \operatorname{tg} iy,$$

a pod.

172. **Logarithmus komplexního čísla; obecná mocnina.**

Přirozeným logarithmem $\log z$ komplexního čísla $z = x + iy$ zoveme každé komplexní číslo $u + iv$, které činí e^{u+iv} rovným z, klademe tedy

$$\log (x + iy) = u + iv,$$

platí-li

$$e^{u+iv} = x + iy,$$

t. j.

$$e^u (\cos v + i \sin v) = x + iy.$$

Z tohoto požadavku vypočteme u, v pohodlněji, položíme-li dané číslo $x + iy$ do normálného tvaru $\varrho(\cos \omega + i \sin \omega)$; aby

$$e^u (\cos v + i \sin v) = \varrho (\cos \omega + i \sin \omega),$$

musí se moduly na obou stranách shodovati, a argumenty též aneb se musí lišiti o celistvý násobek 2π (čl. 17.). Máme tedy

$$e^u = \varrho, \quad v = \omega + 2k\pi,$$

kde reálná hodnota u jest jediná, rovnající se $\log \varrho$ v čl. 52. definovanému, a kde k značí kterékoli číslo celistvé, kladné neb záporné. Tím nalézáme

(9) $$\log [\varrho (\cos \omega + i \sin \omega)] = \log' \varrho + i(\omega + 2k\pi), \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

kde na pravo $\log' \varrho$ značí přirozený logarithmus kladného čísla ϱ v čl. 52. definovaný; čili arithmetický logarithmus kladného čísla ϱ.

Má tedy logarithmus komplexního — tedy i reálného — čísla vždy nekonečně mnoho hodnot; jeho reálnou částí jest arithmetický logarithmus absolutní hodnoty čísla daného, a jeho koefficient při i jest argument ω daného čísla, zvětšený o libovolný celistvý násobek 2π.

Jde-li speciálně o logarithmy reálného kladného čísla, možno

položiti $\omega = 0$, a dané číslo jest pak rovno svému absolutnímu obnosu ϱ; formule (19) pak podává

$$\log \varrho = \log' \varrho + 2k\pi i.$$

Má tedy reálné kladné číslo nekonečně mnoho logarithmů, z nichž jediný jest reálný, plynoucí při $k = 0$, a shodující se s arithmetickým logarithmem.

Jde-li o logarithmus reálného záporného čísla $-\varrho$, možno položiti $\omega = \pi$, čímž

$$\log(-\varrho) = \log' \varrho + (2k+1)\pi i;$$

má tedy reálné záporné číslo výhradně imaginárné logarithmy.

Formuli (9) můžeme přepsati, vycházejíce z tvaru $x + iy$ daného čísla. Dle čl. 15. máme

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\omega = \frac{x}{\varrho}, \quad \sin\omega = \frac{y}{\varrho};$$

při kladném x možno ω vzíti v prvním neb ve čtvrtém kvadrantu, tedy v mezích $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, t. j. možno položiti

$$\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

a při záporném x v druhém neb ve třetím kvadrantu, t. j. možno položiti

$$\omega = \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

Tím nalézáme

$$(10)\quad \begin{cases} \log(x+iy) = \frac{1}{2}\log'(x^2+y^2) + i(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + 2k\pi), & x > 0, \\ \log(x+iy) = \frac{1}{2}\log'(x^2+y^2) + i(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + (2k+1)\pi), & x < 0; \end{cases}$$

při $x = 0$ jest $\omega = \pm\frac{\pi}{2}$ souhlasně s $y \gtrless 0$, a tedy

$$(11)\quad \begin{cases} \log iy = \frac{1}{2}\log' y^2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), & y > 0, \\ \log iy = \frac{1}{2}\log' y^2 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), & y < 0. \end{cases}$$

Všude klademe $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Symbol u^v při komplexních u, v se definuje rovnicí

$$u^v = e^{v \log u},$$

která při reálném u a v a při $u > 0$ jest totožností. Značíme-li $\log u$ jednu z hodnot tohoto logarithmu, jsou všecky dány výrazem $\log u + 2k\pi i$ a má tedy

$$u^v = e^{v \log u} \cdot e^{\pi i v}$$

nekonečně mnoho hodnot.

Abychom n. p. vyčíslili i^i, uvažme, že má i modul 1 a argument $\frac{\pi}{2}$, tak že

$$\log i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),$$

$$i^i = e^{i \log i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}};$$

má tedy i^i nekonečně mnoho hodnot, veskrze reálných.

173. **Periodičnost funkcí exponenciálné a goniometrických.**

Exponenciálná funkce e_z má imaginárnou periodu $2\pi i$, t. j.

$$e^{z+2\pi i} = e^z;$$

v skutku máme

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

Obecněji máme při celistvém, kladném neb záporném k,

$$e^{z+2k\pi i} = e^z;$$

platí-li tedy $e^z = Z$, platí také $e^{z+2k\pi i} = Z$, t. j. jest-li $z = \log Z$, jest také $z + 2k\pi i = \log Z$, kde symbol log jest ovšem nekonečně mnohoznačný.

Goniometrické funkce $\cos z$ a $\sin z$ mají periodu reálnou 2π, jakož přímo vychází z periodičnosti funkce exponenciálné; tak n. p.

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Funkce $\operatorname{tg} z$ a $\operatorname{cotg} z$, jsouce podíly funkcí $\sin z$ a $\cos z$, mají ovšem také periodu 2π; avšak ony mají již π za periodu, jakož patrno z rovností

$$\operatorname{tg}(z + \pi) = \frac{1}{i} \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)}} = \frac{1}{i} \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{-e^{iz} - e^{-iz}} = \operatorname{tg} z,$$

$$\operatorname{cotg}(z + \pi) = \frac{1}{\operatorname{tg}(z + \pi)} = \frac{1}{\operatorname{tg} z} = \operatorname{cotg} z.$$

174. Funkce cyklometrické.

Také při komplexních proměnných nazýváme cyklometrickými funkce inversní goniometrických. Klademe obecně

$$u = \arcsin z, \text{ jest-li že } z = \sin u,$$
$$u = \arccos z, \text{ jest-li že } z = \cos u,$$
$$u = \operatorname{arc\,tg} z, \text{ jest-li že } z = \operatorname{tg} u,$$

a pod.

Funkce cyklometrické možno vyjádřiti logarithmy. Z rovnice (4)

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u$$

soudíme, že

(12) $$iu = \log(\cos u + i \sin u).$$

Položíme-li $\sin u = z$, tedy $\cos u = \sqrt{1 - z^2}$, $u = \arcsin z$, máme

(13) $$\arcsin z = \frac{1}{i} \log(\sqrt{1 - z^2} + iz),$$

a s. možno vzíti $\sqrt{1 - z^2}$ s obojím znamením a položiti za logarithmus všecky jeho hodnoty, v nekonečném počtu, neboť snadno zverifikujeme, že pak vždy

$$\sin\left[\frac{1}{i} \log(\sqrt{1 - z^2} + iz)\right] = z.$$

Obdobně máme, položíme-li v (12) $\cos u = z$, $\sin u = \sqrt{1 - z^2}$, $u = \arccos z$ formuli pro arc cos libovolného argumentu

(14) $$\arccos z = \frac{1}{i} \log(z + i\sqrt{1 - z^2}),$$

v níž opět jest odmocnina dvojznačná a logarithmus nekonečně mnohoznačný.

Jest-li speciálně z reálné a < 1, jest $\sqrt{1 - z^2}$ reálný; absolutní hodnota čísla $\sqrt{1 - z^2} + iz$ jest 1, tedy

$$\log(\sqrt{1 - z^2} + iz) = i(\omega + 2k\pi)$$

a

$$\arcsin z = \omega + 2k\pi$$

jest reálný; při tom ω značí argument čísla $\sqrt{1 - z^2} + iz$, tedy úhel, jehož cos a sin jest resp. $\sqrt{1 - z^2}$, z.

Jest-li ale z reálné, ale číselně > 1, aneb imaginárné, podává (13) pro arc sin z jen imaginárné hodnoty; n. p.

$$\arcsin 3 = \frac{1}{i} \log(\sqrt{-8} + 3i) = \frac{1}{i} \log i(\sqrt{8} + 3)$$
$$= \frac{1}{i} \log(\sqrt{8} + 3) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

a béřeme-li odmocninu záporně, máme další hodnoty

$$\arcsin 3 = \frac{1}{i}\log'(-\sqrt{8}+3)+\frac{\pi}{2}+2k\pi;$$

k opět značí $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Dělením rovnic (4) a (5) obdržíme

$$e^{2iu} = \frac{\cos u + i \sin u}{\cos u - i \sin u} = \frac{1 + i \operatorname{tg} u}{1 - i \operatorname{tg} u},$$

z čehož soudíme

$$u = \frac{1}{2i}\log\frac{1 + i \operatorname{tg} u}{1 - i \operatorname{tg} u};$$

položíme-li $\operatorname{tg} u = z$, tedy $u = \operatorname{arc\,tg} z$, máme

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1}{i}\log\frac{1-iz}{1+iz}, \tag{15}$$

tedy také $\operatorname{arc\,tg} z$ vyjádřen pomocí logarithmu.

Při reálném z n. p. jest $\left|\frac{1-iz}{1-iz}\right| = 1$, a tedy $\log\frac{1-iz}{1+iz}$ ryze imaginárný a $\operatorname{arc\,tg} z$ má naskrze reálné hodnoty:

$$\frac{i}{2}\,i\,(\omega + 2k\pi) = -\frac{\omega}{2} - k\pi,$$

kde ω značí argument čísla $\frac{1-iz}{1+iz}$ čili čísla $\frac{1-z^2-2iz}{1+z^2}$, tedy úhel o tangentě $-\frac{2z}{1-z^2}$, t. j. úhel $-2u$; jsou tedy $u - k\pi$ veškeré hodnoty obecně definované funkce $\operatorname{arc\,tg} z$, což se shoduje s čl. 55.

Předchozí úvahy ukazují, že funkce exponenciálná s inversní logarithmickou stačí k vyjádření funkcí goniometrických a jich inversních cyklometrických; venkoncem se tedy tyto elementárné funkce transcendentní redukují na funkci exponenciálnou.

175. **Upotřebení.**

Jakožto applikaci formul vyjadřujících cos. a sin. pomocí funkce exponenciálné uveďme formule vyjadřující celistvou mocnost funkcí sin. a cos. pomocí týchž funkcí násobného argumentu.

Povýšíme-li obě strany rovnice

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

na celistvou kladnou mocnost n, máme dle binomické věty

$$\cos^n x = \frac{1}{2^n}\left[e^{nix} + ne^{(n-1)ix} + \binom{n}{2} e^{(n-4)ix} + \ldots + e^{-nix}\right].$$

Pro sudé $n = 2r$ se na pravo vyskytne střední člen $\binom{2r}{r}e^0$, a spojíme-li souměrně položené členy, máme ihned

$$(16)\qquad \cos^{2r} x = \frac{1}{2^{2r-1}}\left[\cos 2r + \binom{2r}{1}\cos(2r-2)x + \binom{2r}{2}\cos(2r-4) + \ldots + \binom{2r}{2}\frac{1}{2}\right].$$

Pro liché $n = 2r+1$ spojením souměrných členů:

$$(17)\qquad \cos^{2r+1} x = \frac{1}{2^{2r}}\left[\cos(2r+1)x + \binom{2r+1}{1}\cos(2r-1)x + \binom{2r+1}{2}\cos(2r-3)x + \ldots + \binom{2r+1}{r}\cos x\right].$$

Podobně odvodíme zmocněním formule

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

tyto dvě

$$(18)\qquad \sin^{2r} x = \frac{(-1)^r}{2^{2r-1}}\left[\cos 2rx - \binom{2r}{1}\cos(2r-2)x + \binom{2r}{2}\cos(2r-4)x - \ldots + (-1)^r\binom{2r}{r}\frac{1}{2}\right],$$

$$(19)\qquad \sin^{2r+1} x = \frac{(-1)^r}{2^{2r}}\left[\sin(2r+1)x - \binom{2r+1}{1}\sin(2r-1)x + \binom{2r+1}{2}\sin(2r-3)x - \ldots + (-1)^r\binom{2r+1}{r}\sin x\right].$$

Opravy.

Str. 64., řádek 3. zdola; čti: $\lim \sigma''_n = \lim \sigma_n \,.\, \lim \sigma'_n$.

Str. 67., řádek 1. nahoře; místo největší kladná hodnota x, pro niž . . polož: horní mez kladných hodnot x, pro něž . . .

Str. 89., řádek 16. shora; místo *funkce* sluší položiti *funkce funkce.*

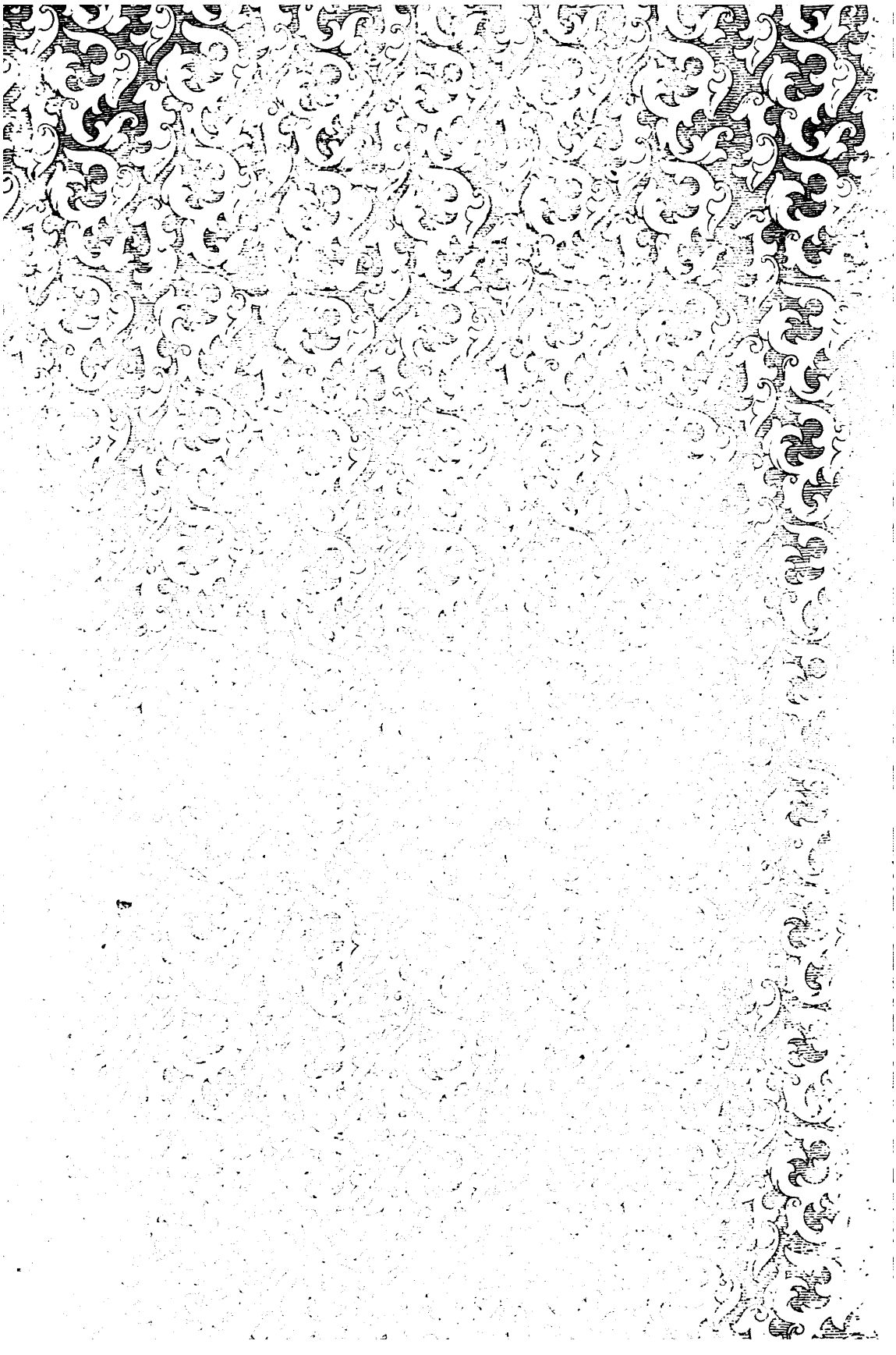
Str. 109., řádek 10. a 12. zdola; místo $a^x - a^x$ sluší položiti $a^{x'} - a^x$.

Str. 113., řádek poslední; místo $m - \infty$ sluší položiti $m = \infty$.

Str. 161., řádek 4. zdola; místo Exercises čti Exercices.

Str. 279., v obr. 28. označ S střed hořejší kružnice, a D průmět bodu M na její narýsovaný průměr.

Str. 307., řádek druhý zdola; místo $\lim \frac{\sqrt{1+q}-1}{2}$ sluší položiti

$$\lim \frac{\sqrt{1+q}-1}{q}.$$

Str. 341., v obr. 39. sluší Θ zaměniti za ϑ.